Fonctions à deux variables

1. Complétez :

Définition 1 (Lignes de niveau) : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

Pour $k \in \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau* k, ou *courbe de niveau* k, l'ensemble

$$\mathrm{L}_k = \{(x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = k\}.$$

Définition 2 : Pour tous $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on appelle :

— *boule ouverte* de centre A et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{B}(\mathrm{A}, r) = \left\{\mathrm{M} \in \mathbb{R}^2 \;/\; \mathrm{AM} < r\right\} = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \|(x\,;y) - (x_0\,;y_0)\| < r\right\}.$$

Définition 3 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On dit que *f est continue en* $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \Omega$ si :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, (x, y) \in \Omega,\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{M}_0)| < \varepsilon.$
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\quad \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, \mathrm{M} \in \Omega,\ \mathrm{M}_0\mathrm{M} < \alpha \implies |f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{M}_0)| < \varepsilon.$
- $\forall\, \mathrm{V}_{f(\mathrm{M}_0)} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(f(\mathrm{M}_0)),\quad \exists\, \mathrm{U}_\mathrm{V} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(\mathrm{M}_0),\ \forall\, \mathrm{M} \in \Omega \cap \mathrm{U}_\mathrm{V},\ f(\mathrm{M}) \in \mathrm{V}_{f(\mathrm{M}_0)}.$

Définition 4 (Dérivée directionnelle) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction, $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\vec{v}(h, k) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que *f est dérivable en* A *dans la direction* $\vec{v}$ si la limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{A} + t\vec{v}) - f(\mathrm{A})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)}{t} \quad \text{existe et est finie.}$$

Le cas échéant, on appelle *dérivée de f en* A dans la direction $\vec{v}$ ce réel noté $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(\mathrm{A})$.

Définition 5 (Gradient) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$.

Si f possède des dérivées partielles en A , on appelle *gradient de f en* A le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,;\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

Proposition 1 (Opérations sur les gradients) :

— $\vec{\nabla}(f \times g) = g\vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} g.$

— $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\vec{\nabla} f.$

2. Préciser le domaine de définition de la fonction suivante et en donner une interprétation géométrique :

$$g : (x\,;y) \longmapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

La fonction g est définie à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 2.

3. Soit f définie par $f(x, y) = \sin^2(x) + \cos(y)$.

Déterminer le domaine de définition D_f.

Calculer ensuite, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition et donner $\vec{\nabla} f\left(\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right)$.

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(y) \qquad \vec{\nabla} f\left(\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right) = \left(1\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Fonctions à deux variables

Matrices et applications linéaires

1. Complétez :

Définition 1 (Surface représentative) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.

On appelle *surface représentative* de f l'ensemble

$$\mathscr{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \in \Omega \text{ et } z = f(x,y)\right\}$$

Définition 2 : Pour tous $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on appelle :

— *boule fermée* de centre A et de rayon r l'ensemble

$$\overline{\mathcal{B}}(\mathrm{A}, r) = \left\{\mathrm{M} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \mathrm{AM} \leqslant r\right\} = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|(x\,;y) - (x_0\,;y_0)\| \leqslant r\right\}.$$

Définition 3 (Limite (finie) en un point) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{M}_0(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f *admet une limite* ℓ *en* M_0 si :

- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, (x,y) \in \Omega,\ \|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \implies |f(x,y) - \ell| < \varepsilon.$
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, \mathrm{M} \in \Omega,\ \mathrm{M}_0\mathrm{M} < \alpha \implies |f(\mathrm{M}) - \ell| < \varepsilon.$
- $\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\ell),\ \exists\, \mathrm{V}_{\mathrm{M}_0} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(\mathrm{M}_0),\ \forall\, \mathrm{M} \in \Omega \cap \mathrm{V}_{\mathrm{M}_0},\ f(\mathrm{M}) \in \mathrm{V}_\ell.$

Définition 4 (Dérivée directionnelle) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction, $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$ et $\vec{v}(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que f *est dérivable en* A *dans la direction* $\vec{v}$ si la limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{A} + t\vec{v}) - f(\mathrm{A})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) - f(x_0, y_0)}{t} \quad \text{existe et est finie.}$$

Le cas échéant, on appelle *dérivée de* f *en* A dans la direction $\vec{v}$ ce réel noté $\mathrm{D}_{\vec{v}}f(\mathrm{A})$.

Matrices et applications linéaires

Définition 5 (Gradient) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $\mathrm{A}(x_0, y_0) \in \Omega$.

Si f possède des dérivées partielles en A , on appelle *gradient de f en* A le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \,;\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Proposition 1 (Opérations sur les gradients) :

— $\vec{\nabla}(\lambda f + g) = \lambda \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$.

— $\vec{\nabla}(\varphi \circ f) = \varphi' \circ f \times \vec{\nabla} f$.

2. Préciser le domaine de définition de la fonction suivante et en donner une interprétation géométrique :

$$h : (x\,;y) \longmapsto \ln(x).$$

La fonction h est définie sur le demi-plan ouvert d'équation $x > 0$.

3. Soit f définie par $f(x, y) = x^2 y$.

Déterminer le domaine de définition D_f.

Calculer ensuite, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition et donner $\vec{\nabla} f\left(\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\right)$.

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \qquad \vec{\nabla} f\left(\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\right) = (4\,; 2).$$

Matrices et applications linéaires