Ensembles et applications

Une seule réponse exacte par question.

1. Soit f une application de E dans E, telle que $f \circ f$ soit surjective. Alors

   (a) ☑ f est forcément surjective
   (b) ☐ f est forcément bijective
   (c) ☐ f est forcément injective
   (d) ☐ on ne peut rien dire sur f

2. Laquelle des figures peut être le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

   (a) ☐ un triangle
   (b) ☐ un cercle
   (c) ☐ un carré
   (d) ☑ une droite

3. Combien y a-t-il d'éléments dans $\mathcal{P}(\{1, 2\})$?

   (a) ☐ 1
   (b) ☐ 2
   (c) ☐ 3
   (d) ☑ 4

4. Si f et g sont deux bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, quelle est la bijection réciproque de $g \circ f$?

   (a) ☐ $g^{-1} \circ f^{-1}$
   (b) ☑ $f^{-1} \circ g^{-1}$
   (c) ☐ $g^{-1} + f^{-1}$
   (d) ☐ $f^{-1} \times g^{-1}$

5. Si f est une application de E dans F, et si A est une partie de F, alors l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{A})$ est

   (a) ☑ $\{x \in \mathrm{E}, f(x) \in \mathrm{A}\}$
   (b) ☐ $\{f^{-1}(x), x \in \mathrm{A}\}$
   (c) ☐ $\mathrm{A} \cap \mathrm{F}$
   (d) ☐ $\mathrm{A} \cap \mathrm{E}$

6. Laquelle des fonctions suivantes établit une injection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$?

   (a) ☐ $x \mapsto \sin x$
   (b) ☑ $x \mapsto x^2$
   (c) ☐ $x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$
   (d) ☐ $x \mapsto ex$

7. Si E et F sont deux ensembles, à quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $\mathrm{E} \cup \mathrm{F} = \mathrm{E} \cap \mathrm{F}$?

   (a) ☐ $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$
   (b) ☐ $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$
   (c) ☑ $\mathrm{E} = \mathrm{F}$
   (d) ☐ E et F sont vides

8. Soit f une application de E dans F et g une application de F dans E telles que $g \circ f = \mathrm{I}_{\mathrm{E}}$. Alors on peut dire que :

   (a) ☐ f est forcément bijective
   (b) ☑ f est forcément injective
   (c) ☐ f est forcément surjective
   (d) ☐ g est forcément injective

9. Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ trois ensembles. Alors $\mathrm{H} = \mathrm{E} \setminus (\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$ vaut

(a) ☐ $(E \setminus F) \cap (E \setminus G)$
(b) ☐ $(E \setminus F) \cap G$
(c) ☑ $(E \setminus F) \cup (E \setminus G)$
(d) ☐ $(E \cap F) \setminus (E \cap G)$

10. Que vaut l'intersection suivante $\displaystyle\bigcap_{n\geqslant 1}\left[1, 1+\frac{1}{n}\right[$?
(a) ☑ $\{1\}$
(b) ☐ $[1,2[$
(c) ☐ $]1,2[$
(d) ☐ $[1,2]$

11. Soit E un ensemble non vide. L'application E de $\mathcal{P}(E)$ qui à x associe $\{x\}$ est
(a) ☑ injective et non surjective
(b) ☐ surjective et non injective
(c) ☐ bijective
(d) ☐ ni injective, ni surjective

12. Soit f une application de E dans F. Quelle condition est **nécessaire** pour que la fonction $f \circ f$ soit définie ?
(a) ☐ $E = F$
(b) ☑ $f(E) \subset E$
(c) ☐ $f(E) \subset F$
(d) ☐ $f^{-1}(F) \subset E$

13. Soit f une bijection de E dans E, A une partie de E et $B = f(A)$. Alors
(a) ☐ $A \subset B$
(b) ☐ $B \subset A$
(c) ☐ $A = B$
(d) ☑ A et B peuvent être disjoints

14. Soit f une application de E dans F et A, B deux parties de E. On a toujours
(a) ☑ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
(b) ☐ $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$
(c) ☐ $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
(d) ☐ $f(A \cap B) = f(A) \cup f(B)$

15. Laquelle des relations suivantes ne définit pas un ordre sur $\mathbb{R}^2$?
(a) ☐ $(x,y) \leqslant_1 (x',y') \iff x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$
(b) ☑ $(x,y) \leqslant_2 (x',y') \iff x \leqslant x'$ ou $y \leqslant y'$
(c) ☐ $(x,y) \leqslant_3 (x',y') \iff x \leqslant x'$ et $y' \leqslant y$
(d) ☐ $(x,y) \leqslant_4 (x',y') \iff x < x'$ ou ($x = x'$ et $y \leqslant y'$)

16. Dans la classe, quelle relation est une relation d'équivalence ?
(a) ☐ est plus grand que
(b) ☐ est le voisin de table de
(c) ☑ vient du même lycée que
(d) ☐ est le frère de

Nombres Complexes

Une seule réponse exacte par question.

1. La valeur de cotan $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ est

   (a) ☐ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) ☐ -1 (c) ☐ $-\sqrt{3}$ (d) ☑ $\sqrt{3}$

2. Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, le réel $\cos\frac{\pi}{12}$ vaut

   (a) ☐ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ (b) ☑ $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ (c) ☐ $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ (d) ☐ $\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$

3. La formule de Moivre affirme que pour tout réel x :

   (a) ☑ $(\cos(x)+i\sin(x))^n = \cos(nx)+i\sin(nx)$
   (b) ☐ $(\cos(x)+\sin(x))^n = \cos(nx)+\sin(nx)$
   (c) ☐ $2\cos(x) = e^{ix}+e^{-ix}$
   (d) ☐ $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$

4. Soit z un nombre complexe non nul tel que $z + \frac{1}{z}$ soit réel. Alors

   (a) ☐ z est un réel
   (b) ☑ z est un réel ou de module 1
   (c) ☐ z est un réel ou imaginaire pur
   (d) ☐ z est un réel ou égal à i ou $-i$

5. Soit $(z, u) \in \mathbb{C}^2$ avec $u^2 = z$. Quand peut-on dire que $|u| < |z|$?

   (a) ☐ c'est toujours le cas
   (b) ☐ lorsque z n'est pas nul
   (c) ☐ lorsque $0 < |z| < 1$
   (d) ☑ lorsque $|z| > 1$

6. Que dire d'un nombre complexe z dont les deux racines carrées sont conjuguées ?

   (a) ☐ c'est toujours le cas
   (b) ☐ cela n'est pas possible
   (c) ☐ z est un imaginaire pur
   (d) ☑ z est un nombre réel négatif

7. Combien y a-t-il de nombres complexes z tels que $|z - i| \leqslant 1$ et $|z - 2| \leqslant 1$?

   (a) ☑ aucun
   (b) ☐ un seul
   (c) ☐ deux complexes conjugués
   (d) ☐ une infinité

8. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Si $|z| = 1$ et $|z'| = 2$, alors $|z' - z|$ est

   (a) ☐ égal à 1
   (b) ☐ compris entre 1 et $\sqrt{5}$
   (c) ☑ compris entre 1 et 3
   (d) ☐ inférieur à -1

9. Laquelle des équations suivantes admet deux solutions complexes conjuguées ?

(a) ☐ $z^2 + 3iz + 4 = 0$
(b) ☐ $z^2 + 3iz - 4 = 0$
(c) ☑ $z^2 + 3z + 4 = 0$
(d) ☐ $z^2 + 3z - 4 = 0$

10. Soient a, b deux nombres complexes, et soit z_1 la racine de l'équation du second degré $z^2 - 2az + b = 0$ qui a le plus grand module. Alors

(a) ☐ $|z_1| \leqslant |a|$ (b) ☐ $|z_1| \leqslant |b|$ (c) ☑ $|z_1| \geqslant |a|$ (d) ☐ $|z_1| \geqslant |b|$

11. Si x est un nombre réel, $(e^{ix} - e^{-ix})^6$ vaut

(a) ☑ $-64\sin^6(x)$ (b) ☐ $64\sin^6(x)$ (c) ☑ $64\cos^6(x)$ (d) ☐ $64\sin(6x)$

12. Le nombre complexe $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est une racine sixième de

(a) ☐ 2 (b) ☐ 12 (c) ☑ 64 (d) ☐ $\frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{18}}$

13. Si x est un réel non nul modulo π, le quotient $\dfrac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}$ vaut

(a) ☐ $i\tan(x)$ (b) ☐ $\mathrm{cotan}\,(x)$ (c) ☐ $i\mathrm{cotan}\,(x)$ (d) ☑ $-i\mathrm{cotan}\,(x)$

14. Quelle est la valeur de $\cos^2\dfrac{\pi}{8}$

(a) ☐ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ (b) ☑ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ (c) ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) ☐ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

15. Si $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ alors

(a) ☐ $x = \dfrac{\pi}{6} \quad [\pi]$

(b) ☐ $x = \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

(c) ☐ $x = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

(d) ☑ $x = \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$

16. Soit x un réel tel que $\tan\dfrac{x}{2} = \sqrt{2}$. Alors $\cos(x)$ vaut

(a) ☐ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(b) ☑ $-\dfrac{1}{3}$

(c) ☐ $\dfrac{1}{3}$

(d) ☐ on ne peut pas savoir

17. Si x est un réel dans $]0, 2\pi[$, le nombre complexe $\dfrac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}$ est égal à

(a) ☑ $e^{i\frac{n-1}{2}x}\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ (b) ☐ $e^{i\frac{n-1}{2}x}\dfrac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ (c) ☐ $e^{i\frac{n+1}{2}x}\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ (d) ☐ $ie^{i\frac{nx}{2}}\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

18. Soit $z = re^{it}$ un nombre complexe, avec r positif. Le module de e^z est

(a) ☐ e^r (b) ☑ $e^{r\cos(t)}$ (c) ☐ $e^{r\sin(t)}$ (d) ☐ $re^{|t|}$

19. Soit $z = re^{it}$ un nombre complexe, avec r positif. Un argument de e^z est

(a) ☐ $\sin(t)$ (b) ☑ $r\sin(t)$ (c) ☐ rt (d) ☐ $r\cos(t)$

20. La fonction $t \mapsto (e^{it})^2$ est périodique de période

(a) ☐ 1
(b) ☐ $\dfrac{\pi}{2}$
(c) ☑ π
(d) ☐ elle n'est pas périodique

21. Si a et b sont deux réels, on a $e^{ia} + e^{ib} = 0$ pour

(a) ☐ $a = -b \quad [2\pi]$
(b) ☐ $a = -b \quad [\pi]$
(c) ☑ $a = b + \pi \quad [2\pi]$
(d) ☐ aucune valeur de a et b

22. Si a, b sont deux réels, le module de $e^{ia} + e^{ib}$ est

(a) ☐ 2
(b) ☐ $2\left|\cos \dfrac{a+b}{2}\right|$
(c) ☑ $2\left|\cos \dfrac{a-b}{2}\right|$
(d) ☐ $e^{i\frac{a+b}{2}}$

23. Si a, b sont deux réels, un argument de $e^{ia} + e^{ib}$ (lorsque ce nombre est non nul) est égal à

(a) ☑ $\dfrac{a+b}{2} \quad [\pi]$
(b) ☐ $\dfrac{a+b}{2} \quad [2\pi]$
(c) ☐ $\pm\dfrac{a+b}{2} \quad [2\pi]$
(d) ☐ $a + b \quad [2\pi]$

24. Les solutions de l'équation $z^6 = \overline{z}^2$ sont

(a) ☐ les racines quatrièmes de l'unité
(b) ☐ les racines quatrièmes de l'unité et 0
(c) ☐ les racines huitièmes de l'unité
(d) ☑ les racines huitièmes de l'unité et 0

Nombres réels

Une seule réponse exacte par question.

1. La partie entière de $-\pi$ vaut :

   (a) ☐ $-0,1415$ (b) ☐ $0,8584$ (c) ☐ -3 (d) ☑ -4

2. Le réel $\ln 8$ vaut

   (a) ☐ $(\ln 2)^3$ (b) ☐ $4\ln 2$ (c) ☐ $\ln 2 + \ln 3$ (d) ☑ $3\ln 2$

3. Soit $n \geqslant 2$. Quel est le plus grand réel entre $\frac{\sqrt{n}}{2^n}$, $\frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$, $\frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}$, $\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}$?

   (a) ☐ $\frac{\sqrt{n}}{2^n}$ (b) ☑ $\frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$ (c) ☐ $\frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}$ (d) ☐ $\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}$

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, le réel $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est égal à :

   (a) ☑ $\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ (c) ☐ $\exp\left(\ln\left(n+1\right)\right)$
   (b) ☐ $\exp\left(\ln n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ (d) ☐ $\exp\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

5. Si x est un nombre réel, $\sqrt[3]{x^2}$ est égal à

   (a) ☐ $x^{3/2}$ (b) ☐ $|x|^{3/2}$ (c) ☐ $x^{2/3}$ (d) ☑ $|x|^{2/3}$

6. Si x est un réel tel que $|2-x| \leqslant 1$, alors

   (a) ☐ $|x| \leqslant 1$ (b) ☑ $|x| \leqslant 3$ (c) ☐ $|x| \geqslant -1$ (d) ☐ $|x| \geqslant 3$

7. Soient a, b, c, d des réels strictement positifs avec $a < b$ et $c < d$. Alors

   (a) ☐ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (b) ☑ $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ (c) ☐ $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ (d) ☐ $\frac{b}{c} < \frac{a}{d}$

8. Soit x un réel. Parmi les conditions suivantes, laquelle est **suffisante** pour affirmer que $x < -1$?

   (a) ☐ $x^2 < 1$ (c) ☑ $|x+2| < 1$
   (b) ☐ $|x+2| > 1$ (d) ☐ $|x+1| < 2$

9. Si x, y sont deux réels tels que $|x-5| \leqslant 1$ et $|y-1| \leqslant 1$, alors on a

(a) ☑ $2 \leqslant |x-y| \leqslant 6$
(b) ☐ $0 \leqslant |x-y| \leqslant 2$
(c) ☐ $4 \leqslant |x-y| \leqslant 6$
(d) ☐ $4 \leqslant |x-y| \leqslant 8$

10. Quelle fonction vérifie $f(x+y)=f(x)f(y)$ pour tous x et y dans son domaine de définition ?

(a) ☐ $f(x)=\ln(2x)$
(b) ☐ $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x)$
(c) ☑ $f(x)=e^{2x}$
(d) ☐ $f(x)=\frac{1}{2}e^{x}$

11. Si a et b sont des réels strictement positifs, $a^{\ln b}$ est égal à

(a) ☐ $e^{\ln(ab)}$
(b) ☑ $b^{\ln a}$
(c) ☐ $\ln\left(a^b\right)$
(d) ☐ $(\ln a)^b$

12. Parmi les ensembles suivants, lequel admet une borne supérieure ?

(a) ☐ $\{x\in\mathbb{R}, x<x+1\}$
(b) ☐ $\{x\in\mathbb{R}_+, x<-1\}$
(c) ☑ $\left\{x\in[-2\pi,2\pi], \sin x=\frac{1}{3}\right\}$
(d) ☐ $\mathbb{Z}$

13. Quelle est la borne supérieure de l'intervalle $[0,1[$?

(a) ☐ 1^-
(b) ☑ 1
(c) ☐ $[1,+\infty[$
(d) ☐ le plus grand réel strictement inférieur à 1

14. Quelle est la borne supérieure de $\{x\in[-2,2], x^2<2\}$?

(a) ☐ 4
(b) ☑ $\sqrt{2}$
(c) ☐ $-\sqrt{2}$
(d) ☐ 0

15. Quelle est la borne inférieure de $\{x\in[-1,3], x^2<4\}$?

(a) ☐ -2
(b) ☑ -1
(c) ☐ 2
(d) ☐ $-\sqrt{2}$

16. Si $f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ est une fonction décroissante, la quantité $\sup\limits_{x\in[-1,1]} f(x^2)$ vaut

(a) ☑ $f(0)$
(b) ☐ $f(1)$
(c) ☐ $f(-1)$
(d) ☐ $\max(f(-1),f(1))$

17. Pour x réel, $\lfloor\lfloor x\rfloor+x\rfloor$ est toujours égal à

(a) ☐ $\lfloor 2x\rfloor$
(b) ☑ $2\lfloor x\rfloor$
(c) ☐ $\lfloor x^2\rfloor$
(d) ☐ $x+\lfloor x\rfloor$

18. Si x est un réel de partie entière n, on a

(a) ☐ $x-1<n<x$
(b) ☐ $x-1\leqslant n<x$
(c) ☑ $x-1<n\leqslant x$
(d) ☐ $x-1\leqslant n\leqslant x$

19. Soit $\mathrm{A}=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$, $\mathrm{B}=\lfloor x+y\rfloor$ et $\mathrm{C}=x+y$. On a

(a) ☑ $A \leqslant B \leqslant C$
(b) ☐ $B \leqslant A \leqslant C$
(c) ☐ $B \leqslant C \leqslant A$
(d) ☐ $C \leqslant B \leqslant A$

Calcul matriciel

Une seule réponse exacte par question.

1. Soient A et B deux matrices de tailles respectives 4×3 et 3×2. Alors le produit AB

   (a) ☐ est de taille 3×3
   (b) ☑ est de taille 4×2
   (c) ☐ est de taille 12×6
   (d) ☐ n'a pas de sens

2. Combien vaut la matrice $(E_{12} + E_{21})^2$?

   (a) ☐ $2E_{11}$ (b) ☐ $2E_{22}$ (c) ☐ $E_{12} + E_{21}$ (d) ☑ $E_{11} + E_{22}$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice $(M - I_3)(M - 2I_3)(M - 3I_3)$ vaut :

   (a) ☐ $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (b) ☑ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) ☐ $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (d) ☐ $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

4. Laquelle des matrices suivantes vérifie $M^2 = -I_2$?

   (a) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) ☑ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

   (a) ☐ A est triangulaire supérieure
   (b) ☑ $c = 0$ et $a = d$
   (c) ☐ $a = c = d = 0$
   (d) ☐ $b = 0$

6. Laquelle des hypothèses suivantes n'implique pas que la matrice carrée A soit aussi diagonale ?

   (a) ☐ $A^\top$ est diagonale
   (b) ☐ $A - I$ est diagonale
   (c) ☑ A^2 est diagonale
   (d) ☐ $2A$ est diagonale

7. Si A est une matrice carrée, $(A^\top)A$ est toujours

   (a) ☐ triangulaire supérieure
   (b) ☐ diagonale
   (c) ☑ symétrique
   (d) ☐ antisymétrique

8. Si A, B sont deux matrices carrées inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'inverse de $(\mathrm{AB})^\top$ est toujours

(a) ☑ $(\mathrm{A}^{-1})^\top(\mathrm{B}^{-1})^\top$
(b) ☐ $(\mathrm{B}^{-1})^\top(\mathrm{A}^{-1})^\top$
(c) ☐ $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$
(d) ☐ $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1}$

9. Si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible, son inverse est

(a) ☑ triangulaire supérieure
(b) ☐ triangulaire inférieure
(c) ☐ symétrique
(d) ☐ une telle matrice n'est jamais inversible

10. L'inverse de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est

(a) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$
(b) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$
(c) ☑ $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$
(d) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

11. On calcule tous les produits $\mathrm{E}_{12}\mathrm{E}_{ij}$. Combien de ces produits sont nuls ?

(a) ☑ n
(b) ☐ $n^2 - n$
(c) ☐ n^3
(d) ☐ aucun car E_{12} est non nulle

12. Si M est une matrice carrée telle que $\mathrm{M}^\top = 2\mathrm{M}$, alors

(a) ☐ M est une matrice diagonale
(b) ☐ M est une matrice symétrique
(c) ☑ M est nulle
(d) ☐ les coefficients diagonaux de M sont nuls

13. Combien de matrices E_{ij} commutent avec E_{11} ?

(a) ☐ 1
(b) ☐ $(n-1)^2$
(c) ☑ $(n-1)^2 - 1$
(d) ☐ n^2

Fonction de la variable réelle - BILAN

Une seule réponse exacte par question.

I/ Généralités

1. La fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ est
   (a) ☑ paire
   (b) ☐ impaire
   (c) ☐ paire et impaire
   (d) ☐ ni paire ni impaire

2. La plus petite période positive de la fonction $f : x \mapsto \cos(\sin x)$ est
   (a) ☐ 2π
   (b) ☑ π
   (c) ☐ $\cos(2\pi)$
   (d) ☐ f n'est pas périodique

3. SI f et g sont croissantes, alors $f - g$ est
   (a) ☐ croissante
   (b) ☐ décroissante
   (c) ☐ monotone
   (d) ☑ n'est pas obligatoirement monotone

4. Une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$
   (a) ☐ est toujours majorée
   (b) ☑ est toujours minorée
   (c) ☐ tend vers $+\infty$ en $+\infty$
   (d) ☐ est continue sur $\mathbb{R}_+$

5. Si f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, la fonction $\max(f, g)$
   (a) ☐ est égale à f
   (b) ☐ est égale à g
   (c) ☑ est la fonction $x \mapsto |x|$
   (d) ☐ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$

6. Quelle condition est suffisante pour dire qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est majorée sur $\mathbb{R}$?
   (a) ☑ f est majorée sur $[n, n+1]$ pour tout n dans $\mathbb{Z}$
   (b) ☐ f est périodique
   (c) ☐ f est croissante et tend vers 0 en $+\infty$
   (d) ☐ f est impaire et majorée sur $\mathbb{R}_+$

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant une fonction quelconque, laquelle des fonctions suivantes n'est pas nécessairement paire ?
   (a) ☐ $x \mapsto f(x^2)$
   (b) ☑ $x \mapsto f(x)^2$
   (c) ☐ $x \mapsto f(x)f(-x)$
   (d) ☐ $x \mapsto f(\cos x)$

8. Soit f strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle fonction n'est pas forcément croissante ?

(a) ☐ $x \mapsto f(f(x))$
(b) ☐ $x \mapsto -f(x)$
(c) ☐ $x \mapsto f(-x)$
(d) ☑ $x \mapsto f(x^2)$

9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de plus petite période $\mathrm{T} > 0$. Alors T^2 est une période de f,
(a) ☐ si et seulement si $\mathrm{T} = 1$
(b) ☑ si et seulement si T est un entier
(c) ☐ pour tout T
(d) ☐ pour aucune valeur de T

II/ Limites et continuité

10. Quelles sont les limites respectives en $-\infty$ et $+\infty$ de $x \mapsto \exp\left(-e^{-x}\right)$?
(a) ☐ 1 et 0
(b) ☑ 0 et 1
(c) ☐ $+\infty$ et 0
(d) ☐ 0 et $+\infty$

11. Lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}x}{x}$
(a) ☑ tend vers 1
(b) ☐ tend vers 0
(c) ☐ tend vers $+\infty$
(d) ☐ n'admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$

12. Lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $x \mapsto x^{1/x}$ tend vers
(a) ☐ 0
(b) ☑ 1
(c) ☐ e
(d) ☐ $+\infty$

13. Laquelle des conditions suivantes est **suffisante** pour que f soit continue en 0 ?
(a) ☑ $|f(x)| \leqslant |x|$ pour tout x dans $[-1, 1]$
(b) ☐ $f(x) \leqslant x$ pour tout x dans $[-1, 1]$
(c) ☐ la suite $(f(1/n))$ converge vers $f(0)$
(d) ☐ f est croissante sur $[-1, 1]$

14. Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tend vers 3 à droite en 0 si
(a) ☑ $\forall\, \epsilon > 0, \exists \eta > 0, 0 < x < \eta \implies |f(x) - 3| \leqslant \epsilon$
(b) ☐ $\forall\, \epsilon \geqslant 0, \exists \eta \geqslant 0, 0 < x < \eta \implies |f(x) - 3| \leqslant \epsilon$
(c) ☐ $\exists \epsilon > 0, \forall\, \eta > 0, 0 < x < \eta \implies |f(x) - 3| \leqslant \epsilon$
(d) ☐ $\forall\, \epsilon > 0, \exists \eta > 0, 0 < x < \epsilon \implies |f(x) - 3| \leqslant \eta$

15. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, et qui tend vers 0 à droite en 0.

Alors on peut trouver un intervalle $[0, \eta]$ avec $\eta > 0$, sur lequel
(a) ☐ $f(x) \leqslant x$
(b) ☑ $f(x) \leqslant 1 - x$
(c) ☐ f est décroissante
(d) ☐ f est nulle

16. Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\star$ telles que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tende vers 1 quand x tend vers 0.

Alors on peut trouver $\eta > 0$ tel que sur $[-\eta, \eta]$
(a) ☐ $f(x) = g(x)$
(b) ☑ f et g ont le même signe
(c) ☐ f et g ont le même sens de variation
(d) ☐ f et g sont continues

17. Pour quelles valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^\alpha\, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ admet-elle une limite finie à droite en 0 ?

Fonction de la variable réelle - BILAN

(a) ☐ $\alpha > 1$
(b) ☑ $\alpha \geqslant 1$
(c) ☐ $\alpha > 0$
(d) ☐ pour tout réel α

18. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère :

    A l'assertion « $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ » ;

    B l'assertion « la suite $(f(n))$ converge vers 0 ».

    Alors :

    (a) ☑ A implique B
    (b) ☐ B implique A
    (c) ☐ A et B sont équivalentes
    (d) ☐ il n'y a pas d'implication entre A et B

19. Laquelle des fonctions suivantes est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

    (a) ☐ $x \mapsto ex$
    (b) ☐ $x \mapsto \tan x$
    (c) ☐ $x \mapsto \arctan x$
    (d) ☑ $x \mapsto \operatorname{sh} x$

20. Le théorème des limites monotones permet de dire que

    (a) ☐ si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et négative, elle tend vers 0 en $+\infty$
    (b) ☑ si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et $f \leqslant 1$, alors f admet une limite finie en $+\infty$
    (c) ☐ si f est strictement positive et tend vers 0 en $+\infty$, alors elle est décroissante
    (d) ☐ si f est décroissante et tend vers 1, alors elle est minorée par 1

21. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \neq 0$. Alors on peut dire que f est soit strictement positive sur tout l'intervalle $[0, 1]$, soit strictement négative sur tout l'intervalle $[0, 1]$. Quel est l'argument invoqué ?

    (a) ☑ le théorème des valeurs intermédiaires
    (b) ☐ f est bornée sur le segment $[0, 1]$
    (c) ☐ f est une bijection continue
    (d) ☐ aucun, cela serait vrai même si f n'était pas continue

22. Soit f croissante sur $\mathbb{R}_+$ et ℓ la limite à droite en 0 de f. Alors

    (a) ☐ ℓ existe et vaut $f(0)$
    (b) ☑ ℓ existe et $\ell \geqslant f(0)$
    (c) ☐ ℓ existe et $\ell \leqslant f(0)$
    (d) ☐ ℓ n'existe pas forcément

23. La fonction sinus établit une bijection de

    (a) ☐ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\mathbb{R}$
    (b) ☑ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$
    (c) ☐ $[-\pi, \pi]$ sur $[-1, 1]$
    (d) ☐ $]0, \pi[$ sur $]0, 1[$

24. Laquelle des fonctions suivantes ne se prolonge pas par continuité en 0 ?

    (a) ☑ $x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$
    (b) ☐ $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$
    (c) ☐ $x \mapsto \sqrt{x^2}$
    (d) ☐ $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ 2x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

25. L'image de l'intervalle $\mathbb{R}_+$ par une fonction continue ne peut pas être

(a) ☐ $\mathbb{R}_-$
(b) ☐ $\mathbb{R}$
(c) ☑ $\mathbb{R}^\star$
(d) ☐ un singleton

26. Lequel des intervalles suivants ne peut pas être envoyé sur $]0,1[$ par une fonction continue ?
   (a) ☑ $[0,1]$
   (b) ☐ $]0,1]$
   (c) ☐ $[0,1[$
   (d) ☐ $]0,1[$

27. Quelle condition est **nécessaire** pour que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admette une limite en $+\infty$?
   (a) ☐ f est monotone et bornée au voisinage de $+\infty$
   (b) ☐ f est constante au voisinage de $+\infty$
   (c) ☑ $f(x+1) - f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$
   (d) ☐ $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ tend vers 1 en $+\infty$

28. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère :

   A l'assertion « f est strictement positive » ;

   B l'assertion « f tend vers 0 en $+\infty$ » ;

   C l'assertion « f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ».

   Alors :
   (a) ☐ (A et B) $\implies$ C
   (b) ☐ (A et C) $\implies$ B
   (c) ☑ (B et C) $\implies$ A
   (d) ☐ B $\implies$ (A et C)

29. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Laquelle des conditions suivantes assure l'existence d'un point fixe de f (i.e. un réel x tel que $f(x) = x$) ?
   (a) ☐ $f(0)$ et $f(1)$ sont de signes contraires
   (b) ☐ f est strictement croissante
   (c) ☑ $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$
   (d) ☐ $f(0)$ et $f(1)$ sont de même signe

30. Soit I un intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive.

   Quelle condition sur I assure l'existence d'un réel $a > 0$ tel que $f(x) \geqslant a$ pour tout x de I ?
   (a) ☐ C'est vrai pour tout intervalle I
   (b) ☐ C'est vrai lorsque I est un intervalle borné
   (c) ☑ C'est vrai lorsque I est un segment
   (d) ☐ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

31. Soit f continue sur un segment $[a,b]$ avec $f(a) < f(b)$. Alors $f([a,b])$)
   (a) ☐ est inclus dans $[f(a), f(b)]$
   (b) ☐ est égal à $[f(a), f(b)]$
   (c) ☑ contient $[f(a), f(b)]$
   (d) ☐ est égal à $\{f(a), f(b)\}$

32. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f \circ f = \mathrm{I}_d$, que peut-on dire ?
   (a) ☐ $f = \mathrm{I}_d$
   (b) ☐ f est strictement croissante
   (c) ☑ f est strictement monotone
   (d) ☐ le graphe de f est symétrique par rapport à D : $y = -x$

33. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. L'ensemble E des réels x tels que $f(x) > 0$ est forcément différent de :

(a) ☐ $\mathbb{R}$
(b) ☑ $]0,1]$
(c) ☐ $]0,1[$
(d) ☐ $]0,1[\cup]1,2[$

34. Quel cas permet d'affirmer que f n'a pas de limite en 0 ?
(a) ☑ $f(0)=1$ et $f(x)=0$ pour tout x non nul
(b) ☐ $|f(x)|\leqslant|x|$ pour tout x
(c) ☐ $f(x)=e^{-1/x^2}$ pour tout x non nul
(d) ☐ $\forall\,\epsilon>0, \exists\eta>0, \forall\,x\in[-\eta,\eta], f(x)\leqslant\epsilon^2$

35. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère :

A l'assertion « f est strictement croissante » ;

B l'assertion « f est continue » ;

C l'assertion « f est surjective ».

Alors :

(a) ☐ (A et B) $\implies$ C
(b) ☑ (A et C) $\implies$ B
(c) ☐ (B et C) $\implies$ A
(d) ☐ aucune des 3 propositions ne résulte des deux autres

III/ Dérivabilité

36. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable, la dérivée de $x\mapsto f(x)f(2x)$ est
(a) ☐ $x\mapsto f'(x)f'(2x)$
(b) ☐ $x\mapsto 2f'(x)f'(2x)$
(c) ☑ $x\mapsto f'(x)f(2x)+2f(x)f'(2x)$
(d) ☐ $x\mapsto f'(x)f(2x)+f(x)f'(2x)$

37. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable, la dérivée de $x\mapsto f(x^3)$ est
(a) ☐ $x\mapsto 3x^2f'(3x^2)$
(b) ☐ $x\mapsto 3f'(x^3)^2$
(c) ☑ $x\mapsto 3x^2f'(x^3)$
(d) ☐ $x\mapsto f'(x^3)$

38. L'équation de la tangente en $x=1$ au graphe de la fonction $f:x\mapsto\ln(x+1)$ est
(a) ☐ $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$
(b) ☑ $y-\ln 2=\dfrac{1}{2}(x-1)$
(c) ☐ $y-\ln 2=x-1$
(d) ☐ $y-1=2(x-\ln 2)$

39. Soit $f:x\mapsto x+x^3$. Il s'agit d'un bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est dérivable sur
(a) ☑ $\mathbb{R}$
(b) ☐ $\mathbb{R}^\star$
(c) ☐ $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$
(d) ☐ $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

40. La dérivée en $x\in\mathbb{R}$ de la fonction sinus est
(a) ☑ $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$
(b) ☐ $\sin(x+\pi)$
(c) ☐ $\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$
(d) ☐ $\sin(x+2\pi)$

41. Si f,g,h sont trois fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la dérivée du produit fgh vaut

(a) ☐ $f'g'h'$
(b) ☐ $f'gh+fgh'$
(c) ☑ $f'gh+fg'h+fgh'$
(d) ☐ $f'g'h+fgh'$

42. Si f,g sont deux fonctions réelles dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(1)=g(1)$, alors
(a) ☐ $f'(1)=g'(1)$
(b) ☐ $f'(1)\neq g'(1)$
(c) ☐ $f'(1)<g'(1)$
(d) ☑ on ne peut rien dire

43. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction dérivable paire, alors f' est
(a) ☐ paire
(b) ☑ impaire
(c) ☐ ni paire ni impaire
(d) ☐ nulle

44. Soient f,g sont deux fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est la dérivée seconde de $g\circ f$?
(a) ☑ $f''\times(g'\circ f)+(f')^2\times(g''\circ f)$
(b) ☐ $f''\times f'\times(g\circ f)+f'\times(g'\circ f)$
(c) ☐ $f'\circ g'\circ f\circ f''\circ g\circ f$
(d) ☐ $g''\circ f''$

45. En 0 la fonction $x\mapsto \dfrac{x}{\sin x}$ tend vers
(a) ☐ 0
(b) ☑ 1
(c) ☐ $\dfrac{1}{\cos x}$
(d) ☐ $+\infty$

46. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable. En appliquant la formule de Leibniz, la dérivée seconde de $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^\star$ est
(a) ☐ $x\mapsto\dfrac{f''(x)}{x}-\dfrac{f'(x)}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x^3}$
(b) ☑ $x\mapsto\dfrac{f''(x)}{x}-\dfrac{2f'(x)}{x^2}+\dfrac{2f(x)}{x^3}$
(c) ☐ $x\mapsto\dfrac{f''(x)}{x}-\dfrac{f'(x)}{x^2}+\dfrac{2f(x)}{x^3}$
(d) ☐ $x\mapsto\dfrac{f''(x)}{x}+\dfrac{2f'(x)}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x^3}$

47. La dérivée de $x\mapsto\ln|x|$ sur $\mathbb{R}^\star$ est
(a) ☐ $x\mapsto\dfrac{1}{|x|}$
(b) ☐ $x\mapsto\left|\dfrac{1}{x}\right|$
(c) ☐ $x\mapsto\dfrac{1}{\ln|x|}$
(d) ☑ $x\mapsto\dfrac{1}{x}$

48. La fonction $f:x\mapsto x+\sin x$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est dérivable sur
(a) ☐ $\mathbb{R}$
(b) ☐ $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$
(c) ☑ $\mathbb{R}\setminus\{(2k-1)\pi,k\in\mathbb{Z}\}$
(d) ☐ $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

49. Laquelle des fonctions vérifie : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f(x)f'(x)=1$?
(a) ☐ $x\mapsto e^{-x}$
(b) ☐ $x\mapsto\ln(\ln x)$
(c) ☑ $x\mapsto\sqrt{2x}$
(d) ☐ $x\mapsto\tan x$

50. Pour $k\leqslant n$ la dérivée k-ième de $x\mapsto x^n$ est
(a) ☑ $\dfrac{n!}{(n-k)!}\,x^{n-k}$
(b) ☐ $\dbinom{n}{k}\,x^{n-k}$
(c) ☐ $k!\,x^{n-k}$
(d) ☐ $(n-k)!\,x^{n-k}$

51. La dérivée de la fonction $x\mapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ est
(a) ☐ $x\mapsto x^{x-1}$
(b) ☐ $x\mapsto xx^{x-1}=x^x$
(c) ☑ $x\mapsto(1+\ln x)x^x$
(d) ☐ $x\mapsto(1+\ln x)x^{x-1}$

52. Quelle est la dérivée en 0 de la fonction $f:x\mapsto\tan\left(1+\sin\left(\tan x^2\right)\right)$?

(a) ☑ 0
(b) ☐ $\tan 1$
(c) ☐ $\dfrac{\pi}{4}$
(d) ☐ $1+\tan^2 1$

53. Si f est dérivable en 0, la limite de $\dfrac{f(3h)-f(h)}{h}$, lorsque h tend vers 0 est
(a) ☐ $f'(0)$
(b) ☑ $2f'(0)$
(c) ☐ $3f'(0)$
(d) ☐ $4f'(0)$

54. Soit $n \geqslant 2$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Si on dérive n fois l'égalité $(1+x^2)f(x) = 1$, on obtient la relation
(a) ☐ $(1+x^2)f^{(n)}(x) = 0$
(b) ☐ $(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2xf^{(n-1)}(x) + 2f^{(n-2)}(x) = 0$
(c) ☐ $(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + \dfrac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}(x) = 0$
(d) ☑ $(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$

55. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin^2 x}$ est dérivable sur
(a) ☐ $\mathbb{R}$
(b) ☐ $\mathbb{R}^\star$
(c) ☐ $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
(d) ☑ $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

56. Soit $f : x \mapsto (1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)$. La valeur de $f'(0)$ est
(a) ☐ 1
(b) ☐ $n+1$
(c) ☑ $\dfrac{n(n+1)}{2}$
(d) ☐ $n!$

57. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$?
(a) ☐ f est strictement monotone
(b) ☐ f n'a pas d'extremum local
(c) ☐ f est injective
(d) ☑ $x \mapsto f(x) - x$ est croissante

58. Que vaut $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{2x}{1+x^2}$?
(a) ☐ 0
(b) ☑ 1
(c) ☐ 2
(d) ☐ $+\infty$

59. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $f(x+1) - f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$
(a) ☑ $f'(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$
(b) ☐ f' est strictement positive
(c) ☐ $f'(x+1) - f'(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$
(d) ☐ f' est 1-périodique

Calcul matriciel et Systèmes linéaires

Une seule réponse exacte par question.

1. Le rang d'une matrice A de taille $n \times p$ est

   (a) ☐ le nombre de colonnes non nulles de A
   (b) ☑ inférieur au nombre de colonnes non nulles de A
   (c) ☐ supérieur au nombre de colonnes non nulles de A
   (d) ☐ n moins le nombre de colonnes non nulles de A

2. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Si on calcule BA avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cela revient à opérer sur A :

   (a) ☑ $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$
   (b) ☐ $C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2$
   (c) ☐ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$
   (d) ☐ $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$

3. Par des opérations élémentaires sur les lignes de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, laquelle des matrices suivantes ne peut-on pas obtenir ?

   (a) ☐ $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   (b) ☑ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   (c) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   (d) ☐ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

4. L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ est

   (a) ☐ $\{(1, 0, 0)\}$
   (b) ☐ $\{(0, 0, 1)\}$
   (c) ☑ $\{(1 - t, t, t), t \in \mathbb{R}\}$
   (d) ☐ $\{(2 - t, 1 + t, t), t \in \mathbb{R}\}$

5. Soit S le système linéaire $AX = B$ où A est une matrice carrée de taille n. Laquelle des conditions suivantes n'implique pas que S est un système de Cramer ?

   (a) ☐ $\operatorname{rg} A = n$
   (b) ☑ A est triangulaire supérieure
   (c) ☐ il existe B_0 tel que le système $AX = B_0$ ait une unique solution
   (d) ☐ le système homogène $AX = 0$ admet une unique solution

Suites réelles et complexes

Une seule réponse exacte par question.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et décroissante. Alors

   (a) ☑ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est positive ou nulle
   (b) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
   (c) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est strictement positive
   (d) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et est constante à partir d'un certain rang

2. Soit I un intervalle et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de I qui converge.

   Pour quel intervalle I est-on certain que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans I ?

   (a) ☐ $]0,1[$ (b) ☑ $[0,1]$ (c) ☐ $[0,1[$ (d) ☐ $]0,+\infty[$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

   Laquelle des conditions suivantes suffit pour dire que les suites $(-u_n)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

   (a) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   (b) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
   (c) ☑ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0
   (d) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers 0

4. Dans quel cas le théorème d'encadrement permet-il de montrer que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

   (a) ☐ $\forall n \geqslant 1, \quad \dfrac{n+1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n}$
   (b) ☑ $\forall n \geqslant 1, \quad \dfrac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$
   (c) ☐ $\forall n \geqslant 1, \quad \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2n}$
   (d) ☐ $\forall n \geqslant 0, \quad n \leqslant u_n \leqslant n+1$

5. Laquelle des suites suivantes est extraite de la suite $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$?

   (a) ☐ $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ (b) ☐ $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ (c) ☑ $(u_{2n+2})_{n\geqslant 0}$ (d) ☐ $(u_{n^2})_{n\geqslant 0}$

6. On pose $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Laquelle des suites suivantes converge ?

   (a) ☐ $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ (b) ☐ $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ (c) ☑ $(u_{4n})_{n\geqslant 0}$ (d) ☐ $(u_{n^2})_{n\geqslant 0}$

7. Soit $a > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n!}{a^n}$ est croissante à partir d'un certain rang

   (a) ☑ pour tout $a > 0$
   (b) ☐ seulement pour a dans $]0,1]$
   (c) ☐ seulement pour $a \geqslant 1$
   (d) ☐ pour aucune valeur de a

8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante. On pose $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes

(a) ☐ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
(b) ☑ lorsque $u_{n+1}-u_n \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout n
(c) ☐ lorsque $u_{n+1}-u_n \geqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout n
(d) ☐ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

9. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles telles que $(u_n - v_n)$ converge, alors

(a) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent
(b) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
(c) ☑ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
(d) ☐ $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1

10. Laquelle des conditions suivantes est incompatible avec le fait que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique ?

(a) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
(b) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
(c) ☑ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante
(d) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive

11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang ?

(a) ☐ u_n tend vers 0
(b) ☐ $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0
(c) ☐ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1
(d) ☑ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$

12. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que $1-\dfrac{1}{n} < u_n < 2+\dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, alors

(a) ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in [1,2]$
(b) ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in]1,2[$
(c) ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$
(d) ☑ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas forcément

13. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n + (-1)^n$ est

(a) ☐ croissante
(b) ☐ décroissante
(c) ☑ non monotone
(d) ☐ croissante et décroissante selon la parité de n

14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout n. Alors on peut dire que

(a) ☐ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1
(b) ☐ si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
(c) ☐ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1
(d) ☑ si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante.

Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

(a) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
(b) ☐ la suite extraite (u_{2n}) converge
(c) ☑ la suite $(u_{n+1}-u_n)$ tend vers 0
(d) ☐ la suite extraite (u_{2n}) est bornée

16. Soit $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adjacente avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors

(a) ☐ pour tout n, on a $v_n > 1$
(b) ☑ pour tout n, on a $v_n - u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$
(c) ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n > 1$
(d) ☐ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

17. Parmi les suites suivantes, laquelle est une suite géométrique ?

(a) ☑ $\left(e^{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (b) ☐ $\left((n+1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (c) ☐ $\left(2^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (d) ☐ $(3n)_{n\in\mathbb{N}}$

18. Lorsque t est un nombre réel, la suite définie par $u_n = e^{int}$ converge pour

(a) ☑ $t = 0 \quad [2\pi]$
(b) ☐ $t = 0 \quad [\pi]$
(c) ☐ aucune valeur de t
(d) ☐ pour tout réel t

19. Combien vaut $a + a^2 + \cdots + a^n$ lorsque a est un réel différent de 1 ?

(a) ☐ $\dfrac{1-a^n}{1-a}$
(b) ☐ $\dfrac{a-a^n}{1-a}$
(c) ☑ $\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}$
(d) ☐ $\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

20. Quelle relation de récurrence est vérifiée par la suite définie par $u_n = 2^n + 3^n$?

(a) ☐ $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$
(b) ☐ $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
(c) ☐ $u_{n+2} = 5u_{n+1} + 6u_n$
(d) ☑ $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

21. Soit $u_n = 2n + 3$. Combien vaut $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$?

(a) ☑ $3(n+1)^2$ (b) ☐ $3n(n+1)$ (c) ☐ $\dfrac{(n+1)(6n+9)}{2}$ (d) ☐ $\dfrac{n(6n+9)}{2}$

22. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3$ pour tout n. Alors la suite définie par $t_n = u_n - a$ est une suite géométrique lorsque :

(a) ☐ $a = 3$ (b) ☑ $a = -3$ (c) ☐ $a = 2$ (d) ☐ $a = 0$

23. Quel est le comportement de la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^3$?

(a) ☐ elle tend vers 1 en croissant
(b) ☐ elle tend vers 1 en décroissant
(c) ☑ elle tend vers 0 en décroissant
(d) ☐ elle diverge vers $+\infty$ en croissant

24. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_1 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Alors on peut montrer par récurrence sur n que :

(a) ☐ u_n est rationnel
(b) ☑ $u_n > 0$
(c) ☐ $u_n \leqslant u_{n+1}$
(d) ☐ $u_n \leqslant nu_1$

25. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ (avec $u_n \neq \ell$ pour tout n). Alors le quotient $\dfrac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}$ tend vers

(a) ☐ 0
(b) ☐ 1
(c) ☑ $f'(\ell)$
(d) ☐ $f'(c)$ où c est compris entre ℓ et u_n

26. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Alors

(a) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car elle est croissante
(b) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc elle tend vers $+\infty$
(c) ☐ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive donc converge et sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell + \ell^2$ donc est nulle
(d) ☑ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée

Polynômes

Une seule réponse exacte par question.

1. Quel est le coefficient de X^2 dans le polynôme $(1+X+X^2+\cdots+X^n)^2$?

   (a) ☐ 2 (b) ☑ 3 (c) ☐ $n+1$ (d) ☐ $n+2$

2. Le degré du polynôme $(X+1)^n-(X-1)^n$ est

   (a) ☐ n^2 (b) ☐ $2n$ (c) ☐ n (d) ☑ $n-1$

3. Quelles sont les racines du polynôme $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X^2-k^2)$?

   (a) ☐ $1,2,\cdots,n$
   (b) ☑ $-n,-(n-1),\cdots,-1,1,\cdots,n$
   (c) ☐ $(-1)^n(n!)^2$
   (d) ☐ $-n^2,-(n-1)^2,\cdots,-1,1,\cdots,n^2$

4. La somme des quatre racines complexes du polynôme $7X^4+2X^2-3X+5$ vaut :

   (a) ☑ 0 (b) ☐ $\dfrac{3}{5}$ (c) ☐ $-\dfrac{2}{7}$ (d) ☐ -2

5. Un polynôme réel qui admet une infinité de racines est :

   (a) ☑ nul (b) ☐ constant (c) ☐ scindé (d) ☐ de degré $+\infty$

6. Soit P un polynôme complexe tel que 0 soit une racine de P′ d'ordre 3. Alors 0

   (a) ☐ est une racine de P d'ordre P(0)
   (b) ☐ est une racine de P d'ordre 2
   (c) ☐ est une racine de P d'ordre 4
   (d) ☑ n'est pas forcément racine de P

7. Soit $P=(X-1)(X+2)^n\in\mathbb{R}[X]$ où $n\in\mathbb{N}$. Alors $P'(1)$ vaut :

   (a) ☐ 0 (b) ☑ 3^n (c) ☐ $\dbinom{n}{1}3^n$ (d) ☐ $\dbinom{n}{n-1}3^n$

8. Quelle est la dérivée k-ième du polynôme X^n (lorsque $k\leqslant n$) ?

   (a) ☐ X^{n-k} (b) ☐ $k!X^{n-k}$ (c) ☐ $(n-k)!X^{n-k}$ (d) ☑ $\dfrac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}$

9. Le degré du polynôme $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X^k-1)$?

(a) ☐ n (b) ☑ $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (c) ☐ $(-1)^n$ (d) ☐ nk

10. La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est

(a) ☐ une fonction polynomiale de degré $\dfrac{1}{2}$
(b) ☐ une fonction polynomiale de degré 1
(c) ☐ une fonction polynomiale de degré 2
(d) ☑ n'est pas une fonction polynomiale

11. Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines sont de module 1. Alors son coefficient constant vaut

(a) ☐ 1
(b) ☐ 0
(c) ☑ 1 ou -1
(d) ☐ un réel quelconque de $[-1, 1]$

12. Soit P un polynôme de degré n. Combien P admet-il au plus de racines doubles ?

(a) ☐ $\sqrt{n}$ (b) ☑ $\dfrac{n}{2}$ (c) ☐ $n-2$ (d) ☐ $2n$

13. Si P et Q sont deux polynômes de degré n, quel est le degré de $PQ' - P'Q$?

(a) ☐ $n^2 - n$ (b) ☐ $n^2 - n - 1$ (c) ☐ $2n - 1$ (d) ☑ $\leqslant 2n - 2$

14. Soit $P = 1 + 2(X-1)^2 + 8(X-1)^4 \in \mathbb{R}[X]$. Que vaut $P''(1)$?

(a) ☐ 1 (b) ☐ 2 (c) ☑ 4 (d) ☐ 8

15. On écrit la division euclidienne d'un polynôme A de degré 8 par un polynôme B de degré 2. Le quotient est de degré

(a) ☐ < 2 (b) ☐ 2 (c) ☐ 4 (d) ☑ 6

16. Dans la division euclidienne de $P = X^5 + 3X^2 + 4$ par $X + 1$ le reste vaut

(a) ☑ 6
(b) ☐ 8
(c) ☐ $X + 3$
(d) ☐ $X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 4$

17. Soit $P = (X^2 - 1)^5$ La dérivée troisième de P en 1 vaut

(a) ☑ 0 (b) ☐ 60 (c) ☐ 360 (d) ☐ 32

18. Si a, b, c sont les trois racines complexes de $X^3 + 2X^2 - X + 1$, que vaut $a^2 + b^2 + c^2$?

(a) ☐ 1 (b) ☐ 2 (c) ☐ 4 (d) ☑ 6

19. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. À l'aide de la formule de Leibniz, que vaut la dérivée n-ième en 1 du polynôme $(X-1)^n(X+2)$?

(a) ☐ 0 (b) ☐ 1 (c) ☐ $n!$ (d) ☑ $3n!$

Analyse asymptotique

Une seule réponse exacte par question.

1. Quelle est la limite de $\dfrac{4^n - 3^n}{2^n - 1}$?

   (a) ☑ $+\infty$ (b) ☐ 2 (c) ☐ 1 (d) ☐ 2^n

2. Si $x_n = 2^n$ et $y_n = n$ alors on peut dire que

   (a) ☐ $x_n = \mathrm{o}(y_n)$ (b) ☑ $y_n = \mathrm{o}(x_n)$ (c) ☐ $x_n \sim y_n$ (d) ☐ $x_n = \mathrm{O}(y_n)$

3. Quelle est la limite de $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2}$?

   (a) ☐ 0 (b) ☑ $\dfrac{1}{2}$ (c) ☐ $\sqrt{n}$ (d) ☐ $+\infty$

4. Laquelle des suites suivantes n'est pas négligeable devant la suite $(2n + \sqrt{n})$?

   (a) ☐ $(\sqrt{n})$ (b) ☐ $(\ln n)$ (c) ☑ (n) (d) ☐ $\left(\dfrac{1}{n}\right)$

5. Soient (x_n) et (y_n) deux suites strictement positives négligeables devant une suite strictement positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Laquelle des suites suivantes n'est pas forcément négligeable devant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   (a) ☐ $x+y$ (b) ☑ xy (c) ☐ $x-y$ (d) ☐ $\sqrt{xy}$

6. Soit $u_n = \dfrac{\ln(2n)}{n}$. Alors u_n est équivalente à

   (a) ☐ 0 (b) ☐ $\dfrac{1}{n}$ (c) ☑ $\dfrac{\ln n}{n}$ (d) ☐ $\ln(2n)$

7. Soit $u_n = \dfrac{e^{n+1}}{n+1}$. Un équivalent simple de u_n est

   (a) ☐ e^n (b) ☐ $\dfrac{e^n}{n}$ (c) ☐ $\dfrac{e^n}{n+1}$ (d) ☑ $\dfrac{e^{n+1}}{n}$

8. Si x et y sont deux suites réelles telles que $x_n \sim n+1$ et $y_n \sim n$ alors

   (a) ☐ $x_n - y_n \sim 0$ (b) ☐ $x_n - y_n \sim 1$ (c) ☐ $x_n - y_n \to +\infty$

   (d) ☑ on ne peut pas donner d'équivalent de $x_n - y_n$

9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle équivalente à $(n+1)$. Laquelle des suites suivantes n'est pas équivalente à u_n ?

Analyse asymptotique

(a) ☐ $\dfrac{n^2+1}{n}$ (b) ☐ n (c) ☑ $\ln(1+n)$ (d) ☐ $n-1$

10. Laquelle des propriétés suivantes permet de dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

(a) ☐ $u_{n+1}-u_n \to 0$ (b) ☐ $u_{n+1} \sim u_n$ (c) ☑ $u_n \sim 1$ (d) ☐ $u_n = \mathrm{o}(n)$

11. Lequel des développements asymptotiques suivants permet de dire que e^{u_n} est équivalent à e^n ?

(a) ☐ $u_n = n + \mathrm{o}(\mathrm{e}^n)$
(b) ☐ $u_n = n + \mathrm{o}(n)$
(c) ☑ $u_n = n + \mathrm{o}(1)$
(d) ☐ $u_n = n + \ln n + \mathrm{o}(\ln(n))$

12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 1. Alors la suite (u_n^n)

(a) ☐ tend aussi vers 1
(b) ☐ converge vers 0
(c) ☐ diverge vers $+\infty$
(d) ☑ est une forme indéterminée.

13. Quelle est la limite de $n^{1/n}$?

(a) ☐ 0 (b) ☑ 1 (c) ☐ e (d) ☐ $+\infty$

14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$. Laquelle des suites suivantes est équivalente à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(a) ☐ (u_{n+1}) (b) ☑ $(1+u_n)$ (c) ☐ $2u_n$ (d) ☐ $\sqrt{u_n}$

15. Laquelle des suites suivantes vérifie $u_{n+1} \sim u_n$?

(a) ☐ $(n!)$ (b) ☐ (2^n) (c) ☐ (n^n) (d) ☑ (n^2)

16. Comment se classent les suites $a_n = 2^{n^2}$, $b_n = n^{2^n}$ et $c_n = 2^{n^n}$ pour la relation de négligeabilité ?

(a) ☑ $a_n \ll b_n \ll c_n$
(b) ☐ $b_n \ll a_n \ll c_n$
(c) ☐ $a_n \ll c_n \ll b_n$
(d) ☐ $c_n \ll a_n \ll b_n$

17. Si $f(x) = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x^2)$ alors $f^2(x)$ admet comme développement limité :

(a) ☐ $1 + 2x + 2x^2 + \mathrm{o}(x^2)$
(b) ☑ $1 + 2x + 3x^2 + \mathrm{o}(x^2)$
(c) ☐ $1 + 2x + 4x^2 + \mathrm{o}(x^2)$
(d) ☐ $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$

18. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ telle que $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \mathrm{o}(x^3)$ alors la valeur de $f^{(3)}(0)$ est

(a) ☐ $1/2$ (b) ☐ 3 (c) ☐ 9 (d) ☑ 18

19. En 0, la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{1+x} - 1$ est équivalente à

(a) ☑ $\dfrac{x}{3}$ (b) ☐ $\sqrt[3]{x}$ (c) ☐ x (d) ☐ $3x$

20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Le polynôme de Taylor de f d'ordre 2 en 1 est

(a) ☐ $f(1) + xf'(1) + \dfrac{x^2}{2} f''(1)$

(b) ☐ $(x-1)\left(f(1) + xf'(1) + \dfrac{x^2}{2} f''(1)\right)$

(c) ☑ $f(1) + (x-1)f'(1) + \dfrac{(x-1)^2}{2} f''(1)$

(d) ☐ $f(x) + (x-1)f'(x) + \dfrac{(x-1)^2}{2} f''(x)$

21. Si en 0 on a $f(x) = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ et $g(x) = 2x + \mathrm{o}\left(x\right)$, alors $f+g$ admet pour développement limité

(a) ☐ $1 + 3x + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ (b) ☑ $1 + 3x + \mathrm{o}\left(x\right)$ (c) ☐ $1+3x+\mathrm{o}\left(x^2\right)+\mathrm{o}\left(x\right)$ (d) ☐ $1+3x+\mathrm{o}\left(x^{3/2}\right)$

22. Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(1+x)^{3/2}$ est

(a) ☐ $1 - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{15}{8}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$

(b) ☑ $1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$

(c) ☐ $1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{4}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$

(d) ☐ $1 + \dfrac{3}{2}x + \mathrm{o}\left(x^2\right)$

23. Laquelle des fonctions suivantes n'admet pas de développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ en 1 ?

(a) ☐ $x \mapsto \sqrt{x}$ (b) ☐ $x \mapsto \ln x$ (c) ☐ $x \mapsto \sin x$ (d) ☑ $x \mapsto \arcsin x$

24. Lequel des développements limités suivants montre que la fonction f est, au voisinage de 0, au-dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = 1 - x$?

(a) ☐ $f(x) = 1 - x + x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$

(b) ☑ $f(x) = 1 - x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$

(c) ☐ $f(x) = 1 - x + \mathrm{o}\left(x\right)$

(d) ☐ $f(x) = 1 - x - x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$

25. Parmi les $2n+1$ coefficients du développement limité à l'ordre $2n$ en 0 de $\sqrt{1+x}$, combien sont positifs ?

(a) ☐ un seul (b) ☐ n (c) ☑ $n+1$ (d) ☐ tous

26. Laquelle des fonctions suivantes n'est pas majorée par x^2 au voisinage de 0 ?

(a) ☐ $x \mapsto \ln(1+x^2)$

(b) ☐ $x \mapsto \sqrt{1+x^2} - 1$

(c) ☑ $x \mapsto 1 - \cos 2x$

(d) ☐ $x \mapsto (\sin x)^2$

27. La limite en 0 de $\dfrac{\tan x - x}{\sin x - x}$ vaut

(a) ☑ -2 (b) ☐ 0 (c) ☐ 1 (d) ☐ $+\infty$

28. Au voisinage de 0, la fonction $\mathrm{ch}\,(x) - \cos(x)$ est

(a) ☑ positive

(b) ☐ négative

(c) ☐ positive pour $x \geqslant 0$ et négative pour $x \leqslant 0$

(d) ☐ négative pour $x \geqslant 0$ et positive pour $x \leqslant 0$

29. Considérons la fonction polynomiale $\mathrm{P}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Au voisinage de zéro, on a $\mathrm{P}(x) = \mathrm{o}\left(x^2\right)$ si et seulement si

(a) ☐ $a = b = 0$ (b) ☑ $a = b = c = 0$ (c) ☐ $a = b = c = d = 0$ (d) ☐ $c = d = 0$

30. Lequel des développements limités suivants montre que la fonction f admet en 0 un point d'inflexion ?

(a) ☐ $f(x) = x + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
(b) ☐ $f(x) = x + \mathrm{o}\left(x\right)$
(c) ☑ $f(x) = x - x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$
(d) ☐ $f(x) = x - x^2 + x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$

31. Pour obtenir un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{x^2 \cos x}{\sin x}$ on a besoin

(a) ☑ du DL_4 de cos et du DL_5 de sin
(b) ☐ du DL_5 de cos et du DL_5 de sin
(c) ☐ du DL_3 de cos et du DL_4 de sin
(d) ☐ du DL_3 de cos et du DL_5 de sin

Dénombrements

Une seule réponse exacte par question.

1. Le nombre d'entiers entre 1 et 60 qui ont la propriété d'être pairs ou d'être divisibles par 3 est

   (a) ☐ 20 (b) ☐ 30 (c) ☑ 40 (d) ☐ 50

2. Combien y a-t-il de couples (a, b) dans $[\![0, 10]\!]^2$ tels que $a + b = 10$?

   (a) ☐ 2 (b) ☐ 10 (c) ☑ 11 (d) ☐ 22

3. Le nombre de mots de 3 lettres distinctes qu'on peut écrire avec les 26 lettres de l'alphabet est

   (a) ☐ $\binom{26}{3}$ (b) ☐ $3\binom{26}{3}$ (c) ☑ $26 \times 25 \times 24$ (d) ☐ $26^3 - 26$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de bijections de $\{0, \cdots, n\}$ sur lui-même est

   (a) ☐ $n!$ (b) ☐ n^n (c) ☑ $(n+1)!$ (d) ☐ $(n+1)^{n+1}$

5. Quel est le cardinal de $\{0, \cdots, 10\}^2 \setminus \{(k, k), k \in \{0, \cdots, 10\}\}$?

   (a) ☐ 10 (b) ☐ 89 (c) ☐ 90 (d) ☑ 110

6. Soit $n \geqslant 1$. La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ vaut

   (a) ☐ 1 (b) ☐ 2^n (c) ☐ $n!$ (d) ☑ 0

7. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, l'entier $k\binom{n}{k}$ est égal à

   (a) ☐ $n\binom{n-1}{k}$ (b) ☐ $n\binom{n-1}{k}$ (c) ☐ $n\binom{n}{k-1}$ (d) ☑ $n\binom{n-1}{k-1}$

8. Le nombre de mots de 5 lettres qu'on peut écrire avec les 26 lettres de l'alphabet est

   (a) ☑ 26^5
   (b) ☐ 5^{26}
   (c) ☐ $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22$
   (d) ☐ $\binom{26}{5}$

9. Le nombre de parties de $\{1, 2, \cdots, n\}$ qui ne contiennent pas 1 est :

(a) ☑ 2^{n-1} (b) ☐ $2^n - 1$ (c) ☐ $2^n - n$ (d) ☐ $\dbinom{n}{n-1}$

10. Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre d'applications de E dans $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ est

(a) ☑ 2^{n^2} (b) ☐ 2^{2^n} (c) ☐ n^{2^n} (d) ☐ n^{n^2}

11. Combien y a-t-il de n-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ d'entiers entre 1 et 10 qui contiennent au moins un nombre pair ?

(a) ☑ $10^n - 5^n$ (b) ☐ $\dfrac{10^n}{2}$ (c) ☐ $\dfrac{10^n}{5^n} = 2^n$ (d) ☐ $n^{10} - n^5$

12. Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre d'applications de E^2 dans E est

(a) ☑ n^{n^2} (b) ☐ n^3 (c) ☐ n^{2n} (d) ☐ n^n

13. Soit $n \geqslant 2$. Combien y a-t-il d'entiers k tels que $\dfrac{n}{2} \leqslant k \leqslant n$?

(a) ☐ $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ (b) ☐ $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$ (c) ☑ $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + 1$ (d) ☐ $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + \dfrac{1}{2}$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$ et x un réel. Combien vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k+1}$?

(a) ☐ $(1+x)^{2n+1}$ (b) ☐ $2^n x^{2n+1}$ (c) ☑ $x(1+x^2)^n$ (d) ☐ $\left(1 + x^{2+\frac{1}{k}}\right)^n$

15. Pour $p \in \mathbb{N}$, que vaut $\dbinom{p+3}{p} + \dbinom{p+3}{p+1}$?

(a) ☐ $\dbinom{p+3}{p+2}$ (b) ☐ $\dbinom{p+4}{p}$ (c) ☑ $\dbinom{p+4}{p+1}$ (d) ☐ $\dbinom{p+4}{2p+1}$

16. Pour tout $n \geqslant 1$, la somme $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ est égale à

(a) ☐ $\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ (c) ☑ $\dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

(b) ☐ $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ (d) ☐ $\dfrac{n(n+1)}{2}$

17. Le nombre de « suites » strictement croissantes formées de 5 entiers choisis dans l'ensemble $\{1, 2, \cdots, 10\}$ est

(a) ☑ $\binom{10}{5}$ (b) ☐ $\dfrac{10!}{5!}$ (c) ☐ 10^5 (d) ☐ $5!$

18. Quel est le nombre de couples (a, b) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $\max(|a|, |b|) \leqslant n$?

(a) ☐ $2n$ (b) ☑ $(2n+1)^2$ (c) ☐ $4n+2$ (d) ☐ $(2n)^2$

19. Soit n, p dans $\mathbb{N}^\star$. Lorsque f est une application de $\{1, 2, \cdots, n\}$ dans $\{1, 2, \cdots, p\}$, à partir de quelle valeur de n est-on en mesure d'affirmer qu'un des éléments de $\{1, 2, \cdots, p\}$ admet au moins trois antécédents ?

(a) ☐ $n \geqslant 3$ (b) ☐ $n \geqslant p+3$ (c) ☑ $n \geqslant 2p+1$ (d) ☐ $n \geqslant 3p$

20. Soit E un ensemble de cardinal n et A une partie de E de cardinal m. Soit p compris entre m et n. Combien y a-t-il de parties de E de cardinal p qui contiennent A ?

(a) ☐ $\binom{n}{p} - \binom{n-m}{p}$ (c) ☐ $\binom{m}{p-m}$

(b) ☐ $\binom{n}{p-m}$ (d) ☑ $\binom{n-m}{p-m}$

Dénombrements

Espaces vectoriels et Applications linéaires

Une seule réponse exacte par question.

1. Laquelle des applications suivantes est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$?

   (a) ☑ $(x, y) \mapsto x$
   (b) ☐ $(x, y) \mapsto xy$
   (c) ☐ $(x, y) \mapsto x + y + 1$
   (d) ☐ $(x, y) \mapsto (x + y)(x - y)$

2. Quel est le nombre de supplémentaires de la droite $\mathrm{D} = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R}^2$?

   (a) ☐ 0 (b) ☐ 1 (c) ☐ 2 (d) ☑ une infinité

3. Laquelle des parties suivantes n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

   (a) ☐ l'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 0$
   (b) ☐ l'ensemble des fonctions paires
   (c) ☑ l'ensemble des fonctions croissantes
   (d) ☐ l'ensemble des fonctions polynomiales

4. Soient E, F deux espaces vectoriels réels, $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On pose $\mathrm{A} = u(\mathrm{vect}\,(e_1, e_2, \cdots, e_p))$ et $\mathrm{B} = \mathrm{vect}\,(u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_p))$. Alors

   (a) ☐ $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ (b) ☐ $\mathrm{B} \supset \mathrm{A}$ (c) ☑ $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ (d) ☐ $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{0\}$

5. Dans l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, laquelle des fonctions suivantes est combinaison linéaire des fonctions $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto x^2$.

   (a) ☐ $x \mapsto (1 + x^2)^2$
   (b) ☐ $x \mapsto \sin x$
   (c) ☑ $x \mapsto (x + 1)(x - 2)$
   (d) ☐ $x \mapsto xe^x$

6. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Quelle propriété est toujours vérifiée ?

   (a) ☐ $\mathrm{Im}\,u \subset \mathrm{Im}\,u^2$
   (b) ☑ $\mathrm{Im}\,u \supset \mathrm{Im}\,u^2$
   (c) ☐ $\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,u^2 = \{0\}$
   (d) ☐ $\mathrm{Im}\,u + \mathrm{Im}\,u^2 = \mathrm{E}$

7. Laquelle des parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel ?

   (a) ☑ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}$
   (b) ☐ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y + x = 1\}$
   (c) ☐ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$
   (d) ☐ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$

8. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Si $u^2 = \mathrm{I}_d$, que vaut $(u^2 + u)^2$?

   (a) ☐ $2\mathrm{I}_d$ (b) ☐ $2u$ (c) ☑ $2\mathrm{I}_d + 2u$ (d) ☐ $\mathrm{I}_d + u^2$

9. Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $\ker(u) \subset \ker(v)$ alors pour tout x dans E,

(a) ☑ $u(x) = 0 \implies v(x) = 0$
(b) ☐ $v(x) = 0 \implies u(x) = 0$
(c) ☐ $u(x) = 0$ et $v(x) = 0$
(d) ☐ $u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$

10. Soit F un sous-espace vectoriel de E, u un endomorphisme de E et v la restriction de u à F.

(a) ☐ $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F})$
(b) ☑ $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$
(c) ☐ $v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$
(d) ☐ v n'est pas forcément linéaire

11. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et F un sous-espace vectoriel de E. A quelle condition la restriction de u à F est-elle injective ?

(a) ☐ si $\ker(u) = \mathrm{F}$
(b) ☐ si $\mathrm{F} \not\subset \ker(u)$
(c) ☑ si $\mathrm{F} \cap \ker(u) = \{0\}$
(d) ☐ si $\mathrm{F} \cap \ker(u) = \emptyset$

12. Soit g non nulle dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Laquelle des applications suivantes de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ n'est pas linéaire ?

(a) ☐ $f \mapsto g \circ f$
(b) ☐ $f \mapsto f \circ g$
(c) ☑ $f \mapsto f + g$
(d) ☐ $f \mapsto g \circ f \circ g$

13. Soit u un endomorphisme de E et x un vecteur de E tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(x)$ vaut :

(a) ☐ λx^n
(b) ☑ $\lambda^n x$
(c) ☐ λx
(d) ☐ $\lambda^n x^n$

14. Si u est un endomorphisme de E, on a toujours

(a) ☑ $\ker(u) \subset \ker(u)^2$
(b) ☐ $\ker(u) \supset \ker(u)^2$
(c) ☐ $\ker(u) = \ker(u)^2$
(d) ☐ $\ker(u) \cap \ker(u)^2 = \{0\}$

Dimension finie

Une seule réponse exacte par question.

Dans toutes les questions, sauf mention contraire, E *est un espace vectoriel réel de dimension finie* $n \geqslant 1$.

1. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

   Laquelle des conditions suivantes permet de dire que cette famille est liée ?

   (a) ☐ $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ engendre E
   (b) ☑ $(e_1, e_2, \dots, e_{p-1})$ engendre E
   (c) ☐ $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ n'engendre pas E
   (d) ☐ $(e_1, e_2, \dots, e_{p-1})$ n'engendre pas E

2. On considère $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (1,1,0)$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors la famille (e_1, e_2, e_3) est

   (a) ☐ génératrice mais pas libre
   (b) ☐ libre mais pas génératrice
   (c) ☐ une base
   (d) ☑ ni libre, ni génératrice

3. Soit $\mathrm{E} = \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\}$. Alors

   (a) ☑ E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 1
   (b) ☐ E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2
   (c) ☐ E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3
   (d) ☐ E n'est pas un $\mathbb{R}$-ev

4. Soit E un espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de E. Alors
   (a) ☐ E est de dimension finie et $\dim \mathrm{E} = p$
   (b) ☑ E est de dimension finie et $\dim \mathrm{E} \leqslant p$
   (c) ☐ E est de dimension finie et $\dim \mathrm{E} \geqslant p$
   (d) ☐ E n'est pas nécessairement de dimension finie

5. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Quelle affirmation est vraie ?
   (a) ☐ toute base de E contient une base de F
   (b) ☑ toute base de F est contenue dans une base de E
   (c) ☐ toute famille génératrice de E contient une famille génératrice de F
   (d) ☐ toute base de E contient une famille génératrice de F

6. Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{G}'$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}'$.

   À quelle condition peut-on dire que $\mathrm{G} = \mathrm{G}'$?

   (a) ☐ C'est toujours le cas
   (b) ☑ Si $\mathrm{G} \subset \mathrm{G}'$
   (c) ☐ Si F est non nul
   (d) ☐ Si $\mathrm{G} + \mathrm{G}' = \mathrm{E}$

7. Soit E un espace vectoriel dans lequel toute famille de 3 vecteurs est liée. Alors
   (a) ☐ E est forcément de dimension finie et $\dim \mathrm{E} \leqslant 3$
   (b) ☑ E est forcément de dimension finie et $\dim \mathrm{E} \leqslant 2$
   (c) ☐ E est forcément de dimension finie et $\dim \mathrm{E} \geqslant 3$
   (d) ☐ E n'est pas forcément de dimension finie

8. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$.

   Lequel des sous-espaces suivants n'est pas un supplémentaire de la droite $\text{vect}\,(e_1)$?

   (a) ☐ $\text{vect}\,(e_2, e_3)$
   (c) ☑ $\text{vect}\,(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$
   (b) ☐ $\text{vect}\,(e_1 + e_2, e_1 + e_3)$
   (d) ☐ $\text{vect}\,(e_2 + e_3, e_2 - e_3)$

9. Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un espace E de dimension 3 et P un plan de E.

   À quelle condition (e_1, e_2) est une base de P ?

   (a) ☐ lorsque e_3 n'est pas dans P
   (b) ☑ lorsque e_1 et e_2 sont dans P
   (c) ☐ lorsque e_3 est dans $\text{vect}\,(e_1, e_2)$.
   (d) ☐ lorsque (e_1, e_2, e_3) est génératrice de P.

10. Soit F, G deux sous-espaces de $\mathbb{R}^6$ de dimensions respectives p et q.

    Dans lequel des cas suivants peut-on trouver à coup sûr un vecteur non nul dans $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$?

    (a) ☐ $p = 4$ et $q = 2$
    (c) ☐ $p = 2$ et $q = 4$
    (b) ☑ $p = 3$ et $q = 4$
    (d) ☐ $p = 1$ et $q = 2$

11. Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ deux bases de E.

    La famille $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ peut être complétée en une base

    (a) ☐ uniquement par le vecteur e_n
    (b) ☐ par n'importe lequel des vecteurs $f_1, f_2, \dots, f_n$
    (c) ☑ par au moins un des vecteurs $f_1, f_2, \dots, f_n$
    (d) ☐ par aucun des vecteurs de la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$

12. Soient $x_1, x_2, \dots, x_p$ des vecteurs de E.

    Laquelle des conditions suivantes assure que x_p est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$

    (a) ☐ la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est liée
    (b) ☐ la famille $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ est libre
    (c) ☑ la famille $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ est libre et la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est liée
    (d) ☐ la famille $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ est liée et la famille $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est libre

13. On suppose que (e_1, e_2, e_3) engendre l'espace vectoriel E.

    Laquelle des conditions suivantes assure que E est de dimension 3 ?

    (a) ☐ (e_1, e_2) est libre
    (b) ☐ les familles $(e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_1, e_3)$ sont libres
    (c) ☐ (e_1, e_2) n'engendre pas E
    (d) ☑ les familles $(e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_1, e_3)$ n'engendrent pas E

14. Soient e_1, e_2, e_3, e_4 des vecteurs de E. On suppose que les familles (e_1, e_2, e_3) et (e_3, e_4) sont libres.

    La dimension de E est forcément supérieure ou égale à

    (a) ☐ 2 (b) ☑ 3 (c) ☐ 4 (d) ☐ 5

15. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives p et q et tels que $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathrm{E}$.
La dimension d'un supplémentaire de $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$ dans F est :
   (a) ☐ q (b) ☐ 0 (c) ☑ $n-q$ (d) ☐ $n+q$
16. Soient F, G deux sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. La dimension p de $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$ peut valoir
   (a) ☐ 1 ou 2 (b) ☑ $1, 2$ ou 3 (c) ☐ $0, 1$ ou 2 (d) ☐ $0, 1, 2$ ou 3
17. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. $(f_1, \dots, f_p)$ une famille libre de F et $(g_1, \dots, g_q)$ une famille libre de G. Quelle condition suffit pour dire que $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est libre ?
   (a) ☐ $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\mathrm{E}$
   (b) ☑ $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0\}$
   (c) ☐ $\mathrm{F}\subset\mathrm{G}$
   (d) ☐ $g_1, \dots, g_q$ ne sont pas dans F et $f_1, \dots, f_p$ ne sont pas dans G.

Intégration

Une seule réponse exacte par question.

1. La suite $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \; \mathrm{d}x$ est
   - (a) ☐ croissante
   - (b) ☐ strictement croissante
   - (c) ☐ décroissante
   - (d) ☑ strictement décroissante

2. Soit $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue. Alors $\mathrm{F}'(x)$ est égal à
   - (a) ☑ $f(\sin^2 x)$
   - (b) ☐ $2\cos x \sin x f(\sin^2 x)$
   - (c) ☐ $2\cos x \sin x f'(\sin^2 x)$
   - (d) ☐ $\displaystyle\int_0^x 2\cos t \sin t f'(\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$

3. Si on fait le changement de variable $u = at$ (avec $a > 0$) dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ on obtient
   - (a) ☐ $\displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{u}{a}\right)\,\mathrm{d}u$
   - (b) ☐ $\displaystyle\int_0^a f\left(\frac{u}{a}\right)\,\mathrm{d}u$
   - (c) ☐ $\displaystyle a\int_0^1 f\left(\frac{u}{a}\right)\,\mathrm{d}u$
   - (d) ☑ $\displaystyle \frac{1}{a}\int_0^a f\left(\frac{u}{a}\right)\,\mathrm{d}u$

4. En supposant les intégrales bien définies, que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$?
   - (a) ☐ $\displaystyle\int_0^k f(t)\,\mathrm{d}t$
   - (b) ☐ $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$
   - (c) ☑ $\displaystyle\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
   - (d) ☐ $\displaystyle\int_{-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$

5. La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ est
   - (a) ☐ $\dfrac{e^{2x}}{2x}$
   - (b) ☐ $\dfrac{e^{2x}}{2x} - e$
   - (c) ☐ $\dfrac{e^{2x}}{x} - 2e$
   - (d) ☑ $\dfrac{e^{2x}}{x}$

6. En intégrant $\displaystyle\int_0^1 xe^x \; \mathrm{d}x$ par parties on trouve
   - (a) ☐ 0
   - (b) ☑ 1
   - (c) ☐ e
   - (d) ☐ $2e - 1$

7. Laquelle des conditions suivantes est suffisante pour dire que la fonction continue f est nulle sur $[0, 1]$?
   - (a) ☐ $\displaystyle\int_0^1 f = 0$
   - (b) ☑ $\displaystyle\int_0^1 f^2 = 0$
   - (c) ☐ $\displaystyle\int_0^1 f \circ f = 0$
   - (d) ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f = \int_{\frac{1}{2}}^1 f$

8. Le changement de variable $u = \sin t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin t)\,\mathrm{d}t$ donne

(a) ☑ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\ \mathrm{d}u$

(b) ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(u)\ \mathrm{d}u$

(c) ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(u)\ \mathrm{d}u$

(d) ☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\ \mathrm{d}u$

9. La suite $u_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \cos\frac{k\pi}{n}$ converge vers

(a) ☐ $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cos x\ \mathrm{d}x$

(b) ☑ $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cos(\pi x)\ \mathrm{d}x$

(c) ☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos x\ \mathrm{d}x$

(d) ☐ $\displaystyle\int_0^1 x^3 \cos(\pi x)\ \mathrm{d}x$

10. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ continue. Que vaut $\displaystyle\int_0^1 f - \int_0^2 f$?

(a) ☑ $\displaystyle -\int_1^2 f$ (b) ☐ $\displaystyle -\int_2^1 f$ (c) ☐ $\displaystyle -\int_0^1 f$ (d) ☐ $\displaystyle\int_1^2 f$

11. Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, f vérifiant de plus les conditions au bord : $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. En intégrant deux fois par parties, $\displaystyle\int_0^1 fg''$ est égale à

(a) ☐ $\displaystyle\int_0^1 f'g$ (b) ☑ $\displaystyle\int_0^1 f''g$ (c) ☐ $\displaystyle -\int_0^1 f''g$ (d) ☐ $\displaystyle -\int_0^1 f'g$

12. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit $f(1) = f(0)+f'(0)+\mathrm{R}$ où R vaut

(a) ☐ $\displaystyle\int_0^1 \frac{f''(t)t^2}{2!}\,\mathrm{d}t$

(b) ☐ $\displaystyle\int_0^1 \frac{f''(t)(1-t)^2}{2!}\,\mathrm{d}t$

(c) ☑ $\displaystyle\int_0^1 f''(t)(1-t)\,\mathrm{d}t$

(d) ☐ $\displaystyle\int_0^1 \frac{f''(t)(1-t)}{2!}\,\mathrm{d}t$

13. La suite $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}$ tend vers

(a) ☑ 0 (b) ☐ $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x$ (c) ☐ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ (d) ☐ $+\infty$

14. Si dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$ on effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - u$, on obtient :

(a) ☑ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u\ \mathrm{d}u$

(b) ☐ $\displaystyle -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u\ \mathrm{d}u$

(c) ☐ $\displaystyle (-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u\ \mathrm{d}u$

(d) ☐ $\displaystyle (-1)^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u\ \mathrm{d}u$

15. Si n est un entier naturel, alors $\displaystyle\int_0^n ex\ \mathrm{d}x$ vaut

(a) ☐ n (b) ☐ $e\frac{n^2}{2}$ (c) ☑ $\frac{n(n-1)}{2}$ (d) ☐ $\frac{n(n+1)}{2}$

16. Soient $a \leqslant b$ deux réels tels que $\displaystyle\int_a^b \sin t \,\mathrm{d}t = b - a$. Alors forcément

(a) ☐ $\sin t = 1$ (b) ☐ $b = a + 2k\pi$ (c) ☑ $b = a$ (d) ☐ $\cos b = \cos a$

17. Lorsque $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, laquelle des intégrales suivantes est strictement positive ?

(a) ☐ $\displaystyle\int_0^1 |f|$ (b) ☑ $\displaystyle\int_0^1 (f^2 - f + 1)$ (c) ☐ $\displaystyle\int_0^1 (f + |f|)$ (d) ☐ $\displaystyle\int_0^1 \sin \circ f$

18. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f = 0$. Alors f

(a) ☐ est nulle
(b) ☐ s'annule exactement une fois sur $]0,1[$
(c) ☑ s'annule au moins une fois sur $]0,1[$
(d) ☐ ne s'annule pas forcément

19. Soit $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sin x} f(t^2)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x)$ est égal à

(a) ☑ $\cos(x) f(\sin^2 x)$
(b) ☐ $\displaystyle\int_0^{\cos x} f(t^2)\,\mathrm{d}t$
(c) ☐ $\displaystyle\int_0^{\sin x} 2tf'(t^2)\,\mathrm{d}t$
(d) ☐ $\cos(x) f'(\sin^2 x)$

20. Soit $a > 0$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle continue telle que $|f| \leqslant \mathrm{M}$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^a f(t)\cos t\,\mathrm{d}t$ est comprise entre

(a) ☐ $-\mathrm{M}$ et M
(b) ☑ $-a\mathrm{M}$ et $a\mathrm{M}$
(c) ☐ $-\mathrm{M}\sin a$ et $\mathrm{M}\sin a$
(d) ☐ $\mathrm{M}\cos 0$ et $\mathrm{M}\cos a$

21. Laquelle des intégrales suivantes est égale à $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^2\,\mathrm{d}t$?

(a) ☐ $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln u}{u^2}\,\mathrm{d}u$ (b) ☑ $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln u)^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$ (c) ☐ $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln u)^2}{u}\,\mathrm{d}u$ (d) ☐ $\displaystyle\int_1^e (\ln u)^2\,\mathrm{d}u$

22. La fonction $\mathrm{F} : \lambda \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\lambda + \sin x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$,

(a) ☐ est croissante et tend vers 0 en $+\infty$
(b) ☑ est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$
(c) ☐ est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$
(d) ☐ est décroissante et tend vers $-\infty$ en $+\infty$

Applications linéaires

Une seule réponse exacte par question.

I/ En dimension quelconque

1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Quelle propriété est toujours vérifiée ?

   (a) ☐ $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} u^2$
   (b) ☑ $\operatorname{Im} u \supset \operatorname{Im} u^2$
   (c) ☐ $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} u^2 = \{0\}$
   (d) ☐ $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} u^2 = \mathrm{E}$

2. Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $\ker u \subset \ker v$ alors pour tout x dans E,

   (a) ☑ $u(x) = 0 \implies v(x) = 0$
   (b) ☐ $v(x) = 0 \implies u(x) = 0$
   (c) ☐ $u(x) = 0$ et $v(x) = 0$
   (d) ☐ $u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E, u un endomorphisme de E et v la restriction de u à F.

   (a) ☐ $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$
   (b) ☑ $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$
   (c) ☐ $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$
   (d) ☐ v n'est pas forcément linéaire

4. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et F un sous-espace vectoriel de E. A quelle condition la restriction de u à F est-elle injective ?

   (a) ☐ si $\ker u = \mathrm{F}$
   (b) ☐ si $\mathrm{F} \not\subset \ker u$
   (c) ☑ si $\mathrm{F} \cap \ker u = \{0\}$
   (d) ☐ si $\mathrm{F} \cap \ker u = \emptyset$

5. Soit g non nulle dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Laquelle des applications suivantes de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ n'est pas linéaire ?

   (a) ☐ $f \mapsto g \circ f$
   (b) ☐ $f \mapsto f \circ g$
   (c) ☑ $f \mapsto f + g$
   (d) ☐ $f \mapsto g \circ f \circ g$

6. Soit u un endomorphisme de E et x un vecteur de E tel que $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(x)$ vaut :

   (a) ☐ λx^n
   (b) ☑ $\lambda^n x$
   (c) ☐ λx
   (d) ☐ $\lambda^n x^n$

7. Si u est un endomorphisme de E, on a toujours

   (a) ☑ $\ker u \subset \ker u^2$
   (b) ☐ $\ker u \supset \ker u^2$
   (c) ☐ $\ker u = \ker u^2$
   (d) ☐ $\ker u \cap \ker u^2 = \{0\}$

8. Si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $v = u \circ v$, alors

(a) ☐ $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$
(b) ☐ $u = \mathrm{I}d$
(c) ☐ $\operatorname{Im} v \subset \ker u$
(d) ☑ $u|_{\operatorname{Im} v} = \mathrm{I}d$

9. Laquelle des applications suivantes est un projecteur de $\mathbb{R}^2$?

(a) ☐ $(x, y) \mapsto (y, x)$
(b) ☐ $(x, y) \mapsto (1, 0)$
(c) ☐ $(x, y) \mapsto (0, x)$
(d) ☑ $(x, y) \mapsto (0, y)$

10. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Si $u^2 = \mathrm{I}d$, que vaut $(u^2 + u)^2$?

(a) ☐ $2\mathrm{I}d$
(b) ☐ $2u$
(c) ☑ $2\mathrm{I}d + 2u$
(d) ☐ $\mathrm{I}d + u^2$

11. Lequel des ensembles suivants de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ n'est pas stable par l'application $f \mapsto f \circ f$?
(a) ☐ l'ensemble des projecteurs
(b) ☐ l'ensemble des symétries
(c) ☑ l'ensemble des endomorphismes non nuls
(d) ☐ l'ensemble des homothéties

II/ En dimension finie

Dans toutes les questions qui suivent, sauf mention contraire, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soit $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $u \in \mathcal{GL}(\mathrm{E})$. Le rang de $u \circ v \circ u^{-1}$ est égal à

(a) ☐ $\dim \mathrm{E}$
(b) ☑ $\operatorname{rg} v$
(c) ☐ $\operatorname{rg} u$
(d) ☐ $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v + \operatorname{rg} v^{-1}$

2. Soit u un endomorphisme de E de rang r. Quel est le rang maximal que peut avoir u^2 ?

(a) ☐ r^2 (b) ☐ $2r$ (c) ☑ r (d) ☐ $r - 2$

3. Si E est de dimension n, la dimension de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est

(a) ☑ n^2 (b) ☐ n (c) ☐ 2^n (d) ☐ $2n$

4. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Combien y a-t-il d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ qui échangent e_1 et e_2 ?

(a) ☐ aucun (b) ☑ 1 (c) ☐ 2 (d) ☐ une infinité

5. Soient f, g deux endomorphismes de E. Laquelle des conditions suivantes implique que $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$?

(a) ☐ $f^2 = g^2$
(b) ☐ $f \circ g = g \circ f$
(c) ☑ $\ker f = \ker g$
(d) ☐ $\mathrm{rg}\,(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{rg}\,(g + \mathrm{Id}_E)$

6. Soit f une forme linéaire sur E et u dans $\mathcal{L}(E)$.

   Laquelle des applications suivantes est aussi une forme linéaire sur E ?

   (a) ☑ $f \circ u$ (b) ☐ $u \circ f$ (c) ☐ $f \circ f$ (d) ☐ $f \times f$

7. Soit A une famille de vecteurs de E. A quelle condition peut-on trouver un endomorphisme de E qui s'annule en tout vecteur de A mais qui n'est pas identiquement nul ?

   (a) ☐ si A est libre
   (b) ☐ si A est génératrice
   (c) ☐ si A n'est pas libre
   (d) ☑ si A n'est pas génératrice

8. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, v$, que peut-on en déduire ?

   (a) ☐ $u = v$
   (b) ☐ $\ker u = \ker v$
   (c) ☑ $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, v$
   (d) ☐ u et v sont surjectives

9. Soit ϕ une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors ϕ est nécessairement

   (a) ☐ injective
   (b) ☑ surjective
   (c) ☐ constante
   (d) ☐ un projecteur

10. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$. Laquelle des propositions suivantes est fausse ?

    (a) ☐ si u est injectif, alors u est bijectif.
    (b) ☐ s'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors u est bijectif
    (c) ☐ si $u + \mathrm{Id}_E$ est bijectif, alors u est bijectif
    (d) ☐ si u^2 est bijectif, alors u est bijectif

11. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Laquelle des propriétés suivantes implique que $u = 0$?

    (a) ☐ $u^2 = 0$
    (b) ☐ $u \circ v = 0$ et $v \neq 0$
    (c) ☑ $v \circ u = 0$ et $\mathrm{Im}\, v = E$
    (d) ☐ $u \circ v = v \circ u$

12. Si E est de dimension n, l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ est de dimension

    (a) ☐ $2n^2$ (b) ☑ n^4 (c) ☐ 2^{2^n} (d) ☐ 4^n

13. Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E tel que $u(F) = F$. Alors

    (a) ☐ $\mathrm{Im}\, u = F$
    (b) ☐ la restriction de u à F est l'identité
    (c) ☑ la restriction de u à F est un automorphisme de F
    (d) ☐ $F \subset \ker(u - \mathrm{Id}_E)$

14. Soient f, g deux endomorphismes de E tels que $g \circ f = 0$. Alors

(a) ☐ $f = 0$ ou $g = 0$
(b) ☐ $\operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{rg} g$
(c) ☐ $\operatorname{rg} g \leqslant \operatorname{rg} f$
(d) ☑ $\operatorname{rg} g + \operatorname{rg} f \leqslant n$

15. Quelle est la dimension de l'espace des polynômes réels P de degré inférieur ou égal à 4 tels que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P} = 0$?

(a) ☐ 0 (b) ☐ 1 (c) ☐ 3 (d) ☑ 4

16. Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$. Alors

(a) ☐ v est bijectif
(b) ☐ v est nul
(c) ☑ $\ker v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$
(d) ☐ $\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$

17. Soit u un endomorphisme de E et v la restriction de u à $\operatorname{Im} u$. A quelle condition v est-il un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ sur lui-même ?

(a) ☐ c'est toujours le cas
(b) ☑ lorsque $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont supplémentaires
(c) ☐ lorsque $\ker u = \operatorname{Im} u$
(d) ☐ lorsque u n'est pas nul

18. Soient $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de E. On suppose que u est un endomorphisme de E qui vérifie $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, …, $u(e_{p-1}) = e_p$ et $u(e_p) = e_1$. Laquelle des conditions suivantes permet de dire que u est bijectif ?

(a) ☐ $p \geqslant \dim \mathrm{E}$
(b) ☐ $p = \dim \mathrm{E}$
(c) ☐ $(e_1, \dots, e_p)$ est libre
(d) ☑ $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice

19. Quelle est la dimension de l'espace des polynômes réels P de degré inférieur ou égal à n tels que $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1)$?

(a) ☑ n (b) ☐ $n - 1$ (c) ☐ $n/2$ (d) ☐ 1

Séries numériques

Une seule réponse exacte par question.

1. Combien vaut la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$?

   (a) ☐ $\frac{3}{2}$ (b) ☑ $\frac{1}{2}$ (c) ☐ $\frac{3}{4}$ (d) ☐ $\frac{1}{4}$

2. Pour quelles valeurs de $a > 0$ la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\operatorname{sh} n}{a^n}$ est-elle convergente ?

   (a) ☐ toutes (b) ☐ $a \geqslant 1$ (c) ☐ $a > 1$ (d) ☑ $a > e$

3. Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\sum \ln(u_n)$ converge.

   Quelle série n'est pas nécessairement convergente ?

   (a) ☑ $\sum u_n$ (c) ☐ $\sum \frac{u_n}{2^n}$
   (b) ☐ $\sum e^{-nu_n}$ (d) ☐ $\sum (u_{n+1} - u_n)$

4. Soit $\alpha > 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1$. La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge si, et seulement si

   (a) ☐ $\alpha > 1$ (b) ☑ $\alpha > \frac{1}{2}$ (c) ☐ $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ (d) ☐ $\alpha > 2$

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. Laquelle des hypothèses suivantes sur la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet de dire que la série $\sum v_n$ converge aussi ?

   (a) ☐ $u_n \sim v_n$ (c) ☑ $n^2 v_n = \mathrm{o}(u_n)$
   (b) ☐ $v_n = \mathrm{o}(u_n)$ (d) ☐ $\forall n, \quad v_n \leqslant u_n$

6. A laquelle des séries suivantes ne peut-on pas appliquer le critère spécial de convergence des séries alternées ?

   (a) ☐ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (c) ☑ $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$
   (b) ☐ $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ (d) ☐ $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

7. Laquelle des hypothèses suivantes sur la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet d'affirmer que $\sum u_n$ converge ?

   (a) ☐ $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (c) ☑ $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$
   (b) ☐ $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 (d) ☐ $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

8. Pour laquelle des séries suivantes sait-on facilement calculer la somme ?

   (a) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$

   (b) ☑ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$

   (c) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+1}$

   (d) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2^n+1}$

9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2})$ vaut

   (a) ☐ u_0

   (b) ☑ $u_0 - u_1$

   (c) ☐ $u_0 - 2u_1 + u_2$

   (d) ☐ l'hypothèse ne suffit pas pour dire que la série proposée converge.

10. Combien vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}$?

   (a) ☐ $\dfrac{e}{2}$

   (b) ☑ $\sqrt{e}$

   (c) ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

   (d) ☐ e^2

11. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Quelle condition est suffisante pour garantir que cette série converge ?

   (a) ☐ $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$

   (b) ☐ $u_n^2 \leqslant \dfrac{1}{n}$

   (c) ☑ $\sqrt{u_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$

   (d) ☐ $e^{u_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$

12. Pour laquelle des séries suivantes le critère de d'Alembert permet-il de montrer la convergence ?

   (a) ☐ $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$

   (b) ☑ $\displaystyle\sum \frac{n}{2^n}$

   (c) ☐ $\displaystyle\sum \frac{\sin n}{n}$

   (d) ☐ $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$

13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, A la propriété « $\sum u_n$ converge » et B la propriété « $\sum u_n^2$ converge ». Alors

   (a) ☐ A $\implies$ B

   (b) ☐ B $\implies$ A

   (c) ☐ A $\iff$ B

   (d) ☑ il n'y a pas d'implication entre A et B.

14. Je suis une série qui converge grâce au critère spécial de convergence des séries alternées, mais je ne suis pas absolument convergente. Qui suis-je ?

   (a) ☑ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

   (b) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

   (c) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

   (d) ☐ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$

15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives. Quel lien logique y a-t-il entre les propositions

   A:« $\sum u_n$ converge » et B:« $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ » ?

Séries numériques

(a) ☐ A $\Longrightarrow$ B

(b) ☐ B $\Longrightarrow$ A

(c) ☐ A $\Longleftrightarrow$ B

(d) ☑ il n'y a pas d'implication entre A et B.

16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Quelle condition est suffisante pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

(a) ☐ $\sum \sin u_n$ converge

(b) ☐ $\sum \dfrac{u_n}{2^n}$ converge

(c) ☑ $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge

(d) ☐ $\sum u_{2n}$ converge

Calcul matriciel et Systèmes linéaires

Une seule réponse exacte par question.

1. Soient A et B deux matrices de tailles respectives 4×3 et 3×2. Alors le produit AB

   (a) ☐ est de taille 3×3
   (b) ☑ est de taille 4×2
   (c) ☐ est de taille 12×6
   (d) ☐ n'a pas de sens

2. Combien vaut la matrice $(\mathrm{E}_{12} + \mathrm{E}_{21})^2$?

   (a) ☐ $2\mathrm{E}_{11}$ (b) ☐ $2\mathrm{E}_{22}$ (c) ☐ $\mathrm{E}_{12} + \mathrm{E}_{21}$ (d) ☑ $\mathrm{E}_{11} + \mathrm{E}_{22}$

3. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice $(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)(\mathrm{M} - 2\mathrm{I}_3)(\mathrm{M} - 3\mathrm{I}_3)$ vaut :

   (a) ☐ $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (b) ☑ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) ☐ $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (d) ☐ $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

4. Laquelle des matrices suivantes vérifie $\mathrm{M}^2 = -\mathrm{I}_2$?

   (a) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) ☑ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec la matrice $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

   (a) ☐ A est triangulaire supérieure
   (b) ☑ $c = 0$ et $a = d$
   (c) ☐ $a = c = d = 0$
   (d) ☐ $b = 0$

6. Laquelle des hypothèses suivantes n'implique pas que la matrice carrée A soit aussi diagonale ?

   (a) ☐ ${}^t\mathrm{A}$ est diagonale
   (b) ☐ $\mathrm{A} - \mathrm{I}$ est diagonale
   (c) ☑ A^2 est diagonale
   (d) ☐ $2\mathrm{A}$ est diagonale

7. Si A est une matrice carrée, $({}^t\mathrm{A})\mathrm{A}$ est toujours

   (a) ☐ triangulaire supérieure
   (b) ☐ diagonale
   (c) ☑ symétrique
   (d) ☐ antisymétrique

8. Si A, B sont deux matrices carrées inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'inverse de ${}^t(\mathrm{AB})$ est toujours

   (a) ☑ ${}^t(\mathrm{A}^{-1}){}^t(\mathrm{B}^{-1})$
   (b) ☐ ${}^t(\mathrm{B}^{-1}){}^t(\mathrm{A}^{-1})$
   (c) ☐ $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$
   (d) ☐ $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1}$

9. Si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible, son inverse est

(a) ☑ triangulaire supérieure (b) ☐ triangulaire inférieure (c) ☐ symétrique

(d) ☐ une telle matrice n'est jamais inversible

10. L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est

(a) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ (b) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$ (c) ☑ $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ (d) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

11. On calcule tous les produits $E_{12}E_{ij}$. Combien de ces produits sont nuls ?

(a) ☑ n (b) ☐ $n^2 - n$ (c) ☐ n^3

(d) ☐ aucun car E_{12} est non nulle

12. Si M est une matrice carrée telle que ${}^t\mathrm{M} = 2\mathrm{M}$, alors

(a) ☐ les coefficients diagonaux de M son nuls
(b) ☐ M est une matrice diagonale
(c) ☐ M est une matrice symétrique
(d) ☑ M est nulle

13. Combien de matrices E_{ij} commutent avec E_{11} ?

(a) ☐ 1 (b) ☐ $(n-1)^2$ (c) ☑ $(n-1)^2 - 1$ (d) ☐ n^2

14. Le rang d'une matrice A de taille $n \times p$ est

(a) ☐ le nombre de colonnes non nulles de A
(b) ☑ inférieur au nombre de colonnes non nulles de A
(c) ☐ supérieur au nombre de colonnes non nulles de A
(d) ☐ n moins le nombre de colonnes non nulles de A

15. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Si on calcule BA avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cela revient à opérer sur A :

(a) ☑ $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ (c) ☐ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$
(b) ☐ $C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2$ (d) ☐ $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$

16. Par des opérations élémentaires sur les lignes de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, laquelle des matrices suivantes ne peut-on pas obtenir ?

(a) ☐ $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) ☑ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(d) ☐ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

17. L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x+z=1 \\ y-z=0 \end{cases}$ est

(a) ☐ $\{(1,0,0)\}$

(b) ☐ $\{(0,0,1)\}$

(c) ☑ $\{(1-t,t,t), t\in\mathbb{R}\}$

(d) ☐ $\{(2-t,1+t,t), t\in\mathbb{R}\}$

18. Soit S le système linéaire $AX = B$ où A est une matrice carrée de taille n. Laquelle des conditions suivantes n'implique pas que S est un système de Cramer ?

(a) ☐ $\operatorname{rg} A = n$

(b) ☑ A est triangulaire supérieure

(c) ☐ il existe B_0 tel que le système $AX = B_0$ ait une unique solution

(d) ☐ le système homogène $AX = 0$ admet une unique solution

Déterminant

Une seule réponse exacte par question.

1. Si $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(n\mathrm{B})$ est égal à

   (a) ☐ $n\det(\mathrm{B})$ (b) ☐ $n!\det(\mathrm{B})$ (c) ☑ $n^n\det(\mathrm{B})$ (d) ☐ $\det(\mathrm{B})^n$

2. Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{pmatrix}$ est égal à

   (a) ☐ $x+y+z$ (b) ☐ $x-y+z$ (c) ☐ $x-y-z$ (d) ☑ $x+y-z$

3. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ de déterminant -1.

   Laquelle des matrices suivantes n'a pas le même déterminant que A ?

   (a) ☐ A^{T} (b) ☐ A^{-1} (c) ☐ $-\mathrm{A}$ (d) ☑ A^2

4. Soient A, B deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{C} = \mathrm{ABA}^{-1}\mathrm{B}^{-1}$. Le déterminant de C

   (a) ☐ vaut 1 car $\mathrm{C} = \mathrm{I}_n$
   (b) ☐ ne vaut 1 que si A et B commutent
   (c) ☑ vaut toujours 1
   (d) ☐ ne peut être calculé en général

5. Dans l'espace des polynômes réels de degré $\leqslant n$, quel est le déterminant de l'application linéaire $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$?

   (a) ☑ 0 (b) ☐ 1 (c) ☐ $n!$ (d) ☐ $(n+1)!$

6. Pour quelles valeurs du réel a la matrice $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

   (a) ☐ pour $a \neq 0$
   (b) ☐ pour $a \neq 0$ et $a \neq -1$
   (c) ☐ pour $a \neq 0$ et $a \neq -2$
   (d) ☑ pour $a \neq 0$ et $a \neq -3$

7. Pour calculer le déterminant de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & -7 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, quelle méthode est la plus efficace ?

   (a) ☑ le pivot de Gauß
   (b) ☐ le développement suivant la première ligne
   (c) ☐ le développement suivant la première colonne
   (d) ☐ le calcul du déterminant de l'endomorphisme associé

8. Combien vaut le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$?

   (a) ☐ -2 (b) ☑ 0 (c) ☐ 1 (d) ☐ 48

9. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E et x un vecteur de E. Dans la base $\mathcal{B}$, la coordonnée de x selon le vecteur e_1 vaut :

   (a) ☐ $\det_{\mathcal{B}}(e_1, x, x, \dots, x)$
   (b) ☐ $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2 + x, e_3 + x, \dots, e_n + x)$
   (c) ☑ $\det_{\mathcal{B}}(x, e_2, \dots, e_n)$
   (d) ☐ $\det_{\mathcal{B}}(x + e_1, e_2, \dots, e_n)$

10. Soient $C_1, \dots, C_n$ des vecteurs colonnes de $\mathbb{K}^n$. On suppose que

$$\det(\text{Mat}(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)) = \det(\text{Mat}(C_2, C_1, C_3, \dots, C_n))$$

   Alors on peut en déduire que :

   (a) ☐ $C_1 = C_2$
   (b) ☐ $C_1 = 0$ ou $C_2 = 0$
   (c) ☐ (C_1, C_2) est liée
   (d) ☑ $(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$ est liée

11. Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n)$,$(y_1, \dots, y_n)$ deux familles de n vecteurs de E. Lorsqu'on développe complètement $\det_{\mathcal{B}}(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ par multilinéarité, on obtient

   (a) ☐ 2 termes (b) ☐ $2n$ termes (c) ☐ n^2 termes (d) ☑ 2^n termes

12. Soit n un entier pair et $A = \text{Mat}(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$.

   On construit la matrice $B = \text{Mat}(C_n, C_{n-1}, \dots, C_2, C_1)$ en réordonnant les colonnes de A. Quelle relation y a-t-il entre les déterminants de A et de B ?

   (a) ☐ $\det A = \det B$
   (b) ☐ $\det A = -\det B$
   (c) ☐ $\det A = (-1)^n \det B$
   (d) ☑ $\det A = (-1)^{\frac{n}{2}} \det B$

13. La fonction $x \mapsto \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

   (a) ☐ est un polynôme de degré 3
   (b) ☑ est un polynôme de degré 2
   (c) ☐ est un polynôme de degré 1
   (d) ☐ n'est pas un polynôme

Déterminant