Passeport première/deuxième année

I/ Compositions de développements limités.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(2x)+\sin(3x)}$ en 0.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $f : x \longmapsto \dfrac{x}{3+\mathrm{e}^{-x}}$ en 0.
3. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{sh}(x)}$ en 1.
4. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $f : x \longmapsto (1+2x)^{\frac{1}{x}}$ en 0.
5. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ en 0.
6. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 de $f : x \longmapsto (\mathrm{e}^{x})^2 \ln^2(1+x)$ en 0.

II/ Prolongements

1. Montrer que $f : x \longmapsto \begin{cases} x\sqrt{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
2. Montrer que $f : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^4}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
3. Montrer que $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
4. Montrer que $f : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
5. Montrer que $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $f'(0)$.
6. Montrer que $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 2 \end{cases}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-2\,;+\infty]$ et préciser $f'(2)$.

III/ Séries numériques à paramètre.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer suivant les valeurs de p la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(np+3)}$.
2. Déterminer suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(1+\tan\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} - 1$.
3. Déterminer suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

On pourra admettre que pour tout $\alpha > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *converge.*

4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de a la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de α la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(n)\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.
6. Soit $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Déterminer suivant les valeurs de α la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\right)$.

IV/ Encadrer une intégrale.

1. Soit $a > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n = \int_1^a \frac{\mathrm{e}^{-t^n}\cos(\sqrt{t})\ln(t)}{1+2t^n}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \int_n^{n^2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{n}}} t^5\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
4. Soient $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}([0;a])$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{I}_n = \int_0^a \arctan\left(\mathrm{e}^{nt}+2\right)\left(\mathrm{e}^{-nt}+3\right) f(t)\mathrm{d}t$$
Montrer que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{I}_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.
6. Soit $f \in \mathscr{C}^1([a\,;b])$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n = \int_a^b \sin(nt)f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

V/ Équations complexes.

1. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{1-iz}{1+iz} \in i\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{U}$.
4. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z-2i}{z+2} \in \mathbb{R}$.
6. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\frac{1-iz}{1+iz}\right| = \sqrt{2}$.

VI/ Théorème fondamental de l'analyse.

1. Justifier que $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{tx} \arccos(tx)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[-1;0[\cup]0;1]$ et donner une expression de sa dérivée.

   Bonus : montrer que φ est définie mais pas continue 0.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}([0;1])$. Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 (1+tx)^n f(t)\mathrm{d}t$ et donner une expression de $\varphi'(0)$.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\int_{x+1}^{\mathrm{e}^x} \sqrt{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t$ et donner une expression de sa dérivée.
4. Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \longmapsto \ln\left(\displaystyle\int_0^{3x} \mathrm{ch}(t)\arcsin(t)\mathrm{d}t\right)$ et donner une expression de sa dérivée.
5. Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$ et donner une expression de sa dérivée.
6. Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\int_2^3 (tx)^{tx}\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de sa dérivée en fonction de φ.

VII/ Manipuler un couple de variables aléatoires.

1. On pioche de façon indépendante deux nombres dans l'ensemble $\{-1;1\}$. On note X la somme et Y le produit. Donner la loi conjointe de X et Y dans un tableau. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Soit $a > 0$. On considère un couple de variables aléatoires (X,Y) à valeurs dans $[\![1;n]\!]^2$ dont la loi conjointe est donnée pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ par $\mathbb{P}((\mathrm{X}=i)\cap(\mathrm{Y}=j)) = \dfrac{a}{2^{i+j}}$. Déterminer les lois marginales en fonction de a (que l'on ne cherchera pas à déterminer).
3. Soient $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;3]\!])$ et $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{B}(3,p)$. On suppose X et Y indépendantes. Donner la loi conjointe de (X,Y) sous forme de tableau.
4. Soient $(p_1,p_2) \in [0;1]^2, \mathrm{X}_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p_1), \mathrm{X}_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(p_2)$ et $\varepsilon \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On pose $\mathrm{Y} = \varepsilon \mathrm{X}_1 + (1-\varepsilon)\mathrm{X}_2$. On suppose ε indépendant de X_1 et de X_2. Déterminer la loi de Y.
5. On lance un dé parfaitement équilibré n fois, puis une pièce de monnaie parfaitement équilibrée également autant de fois qu'on a obtenu d'as avec le dé, et on compte le nombre de Pile obtenus. Soient X et Y les variables aléatoires égales au nombre d'as obtenus avec le dé et au nombre de Pile obtenus avec la pièce. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0;n]\!])$ et $\varepsilon \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On suppose X et ε indépendants. On pose $\mathrm{Y} = (-1)^{\varepsilon}\mathrm{X}$. Déterminer la loi de Y.

VIII/ Inéquations trigonométriques.

1. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) > \sqrt{2}$.
2. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(4x) + (\sqrt{3} - 2)\sin(2x) \geqslant 1 - \sqrt{3}$.
3. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right[$ tels que $\tan(2x) \leqslant 3\tan(x)$.
4. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leqslant 0$.
5. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $4\cos(x)\sin(x) + 1 \leqslant 0$.
6. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = \cos\frac{\pi}{7}$.

IX/ Manipuler les ensembles.

1. Soient E et F deux ensembles, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{F})^2$.

   Montrer que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow f^{-1}(\mathrm{A}) \subset f^{-1}(\mathrm{B})$.
2. Soient E et F deux ensembles, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^2$.

   Montrer que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow f(\mathrm{A}) \subset f(\mathrm{B})$.
3. Soient E et F deux ensembles, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{F})^2$.

   Montrer que $f^{-1}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f^{-1}(\mathrm{A}) \cup f^{-1}(\mathrm{B})$.
4. Soient E et F deux ensembles, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^2$.

   Montrer que $f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{B})$.
5. Soient E et F deux ensembles, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{F})^2$.

   Montrer que $f^{-1}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = f^{-1}(\mathrm{A}) \cap f^{-1}(\mathrm{B})$.
6. Soient E et F deux ensembles, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^2$.

   Montrer que $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$.

X/ Équations complexes du second degré.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 5z + 7 + i = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 4z^2 + 5 = 0$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1 + 3i)z + 4 + 4i = 0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(2 + i)z + 6 + 8i = 0$.
6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.

XI/ Résoudre une équation différentielle d'ordre 2.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y'' - 4y' + 3y = 3x - 5 + 2x^2\mathrm{e}^{-x}$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y'' - 4y' + 4y = 2x\mathrm{e}^{2x}$.
4. Déterminer l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation (E) :

   $$y''y - (y')^2 + 2yy' + 2y^2\ln(y) = 0.$$

   Indication : poser $z = \ln(y)$.
5. Résoudre sur $]-1;1[$ l'équation (E) : $(1-x^2)\,y'' - \left(4\sqrt{1-x^2} + x\right)y' + 3y = 0$.

   Indication : poser $x = \sin(t)$.
6. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation (E) : $4xy'' + (2 - 8\sqrt{x})y' + 4y = 2\sqrt{x}\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$.

   Indication : poser $t = \sqrt{x}$.

XII/ Montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires.

1. Montrer que $\mathrm{F} = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ constante sur } \mathbb{R}\}$ et $\mathrm{G} = \left\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}'(0) = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(1) = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
5. Montrer que $\mathrm{F} = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'' + 3f' + 7f = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
6. Montrer que $\mathrm{F} = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) / f(0) = f'(0) = 0\}$ et $\mathrm{G} = \{x \longmapsto ax + b / (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

XIII/ Calculer un équivalent.

1. Déterminer en justifiant un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$.
2. Déterminer en justifiant un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$.
3. Déterminer en justifiant un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \mathrm{e}^{n^2+3n+\frac{5}{\sqrt{n}}+\frac{6}{n^2}}$.
4. Déterminer en justifiant un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
5. Déterminer en justifiant un équivalent en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+3x}} - \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$.
6. Déterminer en justifiant un équivalent en 0 de $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\ln(1+x)}$.

XIV/ Intersection.

1. Déterminer le nombre de points d'intersection des cercles $\mathcal{C} : x^2-2x+y^2-4y+1=0$ et $\mathcal{C}' : x^2+2x+y^2-2y-7=0$.
2. Montrer que les droites $\mathcal{D}_1 : 3x-y+8=0$, $\mathcal{D}_2 : x-3y-4=0$ et $\mathcal{D}_3 : x+3y+11=0$ sont concourantes et vérifier que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont orthogonales.
3. Soit $\mathcal{C} : x^2+y^2+4x+6y+4=0$ et $\mathrm{M}(-2,0) \in \mathcal{C}$. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ au point M.
4. Déterminer l'ensemble des points d'intersection du cercle $\mathcal{C} : x^2+y^2+\frac{5}{2}x+2y+2=0$ et de la droite $\mathcal{D} : x+y+1=0$.
5. Soient $\mathrm{A}(1,2,-3), \mathrm{B}(-1,2,0)$ et $\mathcal{P} : 2x-y+3z-2=0$. Déterminer des équations paramétriques de (AB) et en déduire l'ensemble des points d'intersection de (AB) avec $\mathcal{P}$.
6. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de la sphère $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ et du plan $\mathcal{P} : x-2y+z-2=0$.

XV/ Calculer un degré.

1. Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $n = \deg(\mathrm{P}) \geqslant 3$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{XP} - \mathrm{X}^2\mathrm{P}^{(3)} + 5\mathrm{X}^4\mathrm{P}''$. Que vaut $\deg(\mathrm{Q})$?
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{4n+1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2}\right) \mathrm{X}^k$. Que vaut $\deg(\mathrm{P})$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P} = \mathrm{X}^n$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$. Que vaut $\deg(\mathrm{Q})$?
4. Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $n = \deg(\mathrm{P}) \geqslant 2$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{P}''\left(\mathrm{X}^3-5\right) + \mathrm{X}^2 \circ \mathrm{P}$. Que vaut $\deg(\mathrm{Q})$?
5. Soient $n \in \mathbb{N}, \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{2n+1} (k+1)^2 \mathrm{X}^k$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{P}(\mathrm{X}) + \mathrm{P}(-\mathrm{X})$. Que vaut $\deg(\mathrm{Q})$?
6. Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $n = \deg(\mathrm{P}) \geqslant 2$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{P} \circ (\mathrm{P} + 3\mathrm{X})$. Que vaut $\deg(\mathrm{Q})$?

XVI/ Équations de fonctions usuelles.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}, 2^{x+1} + 4^x = 15$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Résoudre dans $\mathbb{R} \log_a(x) = \log_x(a)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}, 2^{x^2} = 3^{x^3}$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $(\arcsin(x) - 5)\arcsin(x) = -4$.
5. Démontrer que l'équation $\arctan(x) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{4}$ admet au plus une solution et donner la valeur de l'unique réel possiblement solution.
6. Démontrer que l'équation $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$ admet au plus une solution et donner la valeur de l'unique réel possiblement solution.

XVII/ Faire un changement de variable.

1. Justifier que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^5(t)dt$ existe et calculer I à l'aide du changement de variable $\mu_{1=} = \cos(t)$.
2. Justifier que $f : x \longmapsto x^2\sqrt{1-x^2}$ admet des primitives sur $[-1;1]$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $x = \cos(u)$.
3. Justifier que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \arctan(t)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$ existe et calculer I à l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.
4. Justifier que $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^t$.
5. Justifier que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)}dx$ existe et calculer I à l'aide du changement de variable $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
6. Justifier que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{3+\mathrm{e}^{-t}}\,dt$ existe et calculer I à l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^t$.

XVIII/ Isomorphismes en dimension finie.

1. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{AX} \end{array}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un automorphisme.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n \\ x_2+2x_3+\ldots+(n-1)x_n \\ \vdots \\ x_{n-1}+2x_n \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un automorphisme.
3. Dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\cos,\sin,\mathrm{ch},\mathrm{sh})$. On admet que $(\cos,\sin,\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ forme une base de E. On définit également $\varphi : \begin{array}{l} \mathrm{E} \to \mathrm{E} \\ f \longmapsto f' \end{array}$. On admet que φ est bien définie. Montrer que φ est un automorphisme.
4. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \\ (a,b) \longmapsto a+bj \end{array}$, où on rappelle que $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. On admet que f est linéaire. Montrer que f est un isomorphisme.
5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathrm{P} \longmapsto \left(\mathrm{P}(1),\mathrm{P}'(1),\mathrm{P}''(1),\ldots,\mathrm{P}^{(n)}(1)\right) \end{array}$. On admet que f est bien définie et linéaire. Montrer que f est un isomorphisme.
6. Montrer que l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \to (x+y,-x+y,z) \end{array}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

XIX/ Applications linéaires : aspect théorique.

1. Soient E un espace vectoriel et $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2$. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.
2. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $u^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

   Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \{0_\mathrm{E}\}$.
3. Soient E un espace vectoriel et u un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.
4. Soient E un espace vectoriel et $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

   Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_\mathrm{E}\}$.
5. Soient E un espace vectoriel et $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

   Montrer que $g(\mathrm{Ker}(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.
6. Soit E un K-ev et p, q deux projecteurs de E.

   Montrer que $p \circ q = p \Longleftrightarrow \ker(q) \subset \ker(p)$.

XX/ Développer et linéariser.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, développer $\sin(3a)$.
2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, développer $\cos(a+b+c)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^2(3\theta)\cos(5\theta)$.
5. Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, linéariser $\tan^2(\theta)(\cos(2\theta)+1)$.
6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^2(\theta)\cos^3(\theta)$.