DM 5

Exercice 1 – Montrer que la matrice suivante est inversible et déterminer son inverse par la méthode de votre choix *(on détaillera les calculs effectués et on fera apparaître la vérification à la fin du calcul).*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer si la matrice A est inversible, on applique l'**algorithme du pivot de Gauss**.

a) Opérations sur A

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftrightarrow L_1) \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2)
\end{aligned}$$

b) Opérations sur I_3

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\sim &\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftrightarrow L_1) \\
\sim &\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2)
\end{aligned}$$

Après transformations élémentaires, la matrice qui apparaît est triangulaire supérieure avec tous ses coefficients diagonaux non nuls. La matrice A est donc $\boxed{\text{inversible.}}$ Pour déterminer son inverse, on poursuit l'algorithme.

$$\begin{aligned}
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftrightarrow L_2 + 2L_3) \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_3) \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2) \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftrightarrow (-1)L_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sim &\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftrightarrow L_2 + 2L_3) \\
\sim &\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_3) \\
\sim &\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2) \\
\sim &\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftrightarrow (-1)L_3
\end{aligned}$$

La matrice A est donc inversible et son inverse est donné par

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Vérification.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I_3 \qquad \checkmark$$

Exercice 2 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

1. (a) Calculer u_0, u_1 et u_2.

   (b) Représenter (sans utiliser le calcul fait à la question précédente) sur le graphe en annexe 1 les termes u_0, u_1 et u_2.

   Cf page suivante

   (c) À partir du graphe, que peut-on conjecturer sur la monotonie et le caractère borné de la suite ?

2. Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,2]$.

3. Le but de cette question est de démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{\sqrt{2+u_n} + u_n}$$

   On pourra utiliser la relation de récurrence et multiplier par la quantité conjuguée.

   (b) Tracer le tableau de signe du polynôme $x \mapsto -x^2 + x + 2$.

   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (cf Question 3(c)) et majorée par 2 (cf Question 2). Donc d'après le **théorème de la limite monotone**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers un réel } \ell.}$

5. Déterminer la valeur de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. D'une part, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_n \leq 2$$

   Donc, en passant à la limite, on obtient,

$$0 \leq \ell \leq 2$$

D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

Donc, en passant à la limite, on obtient

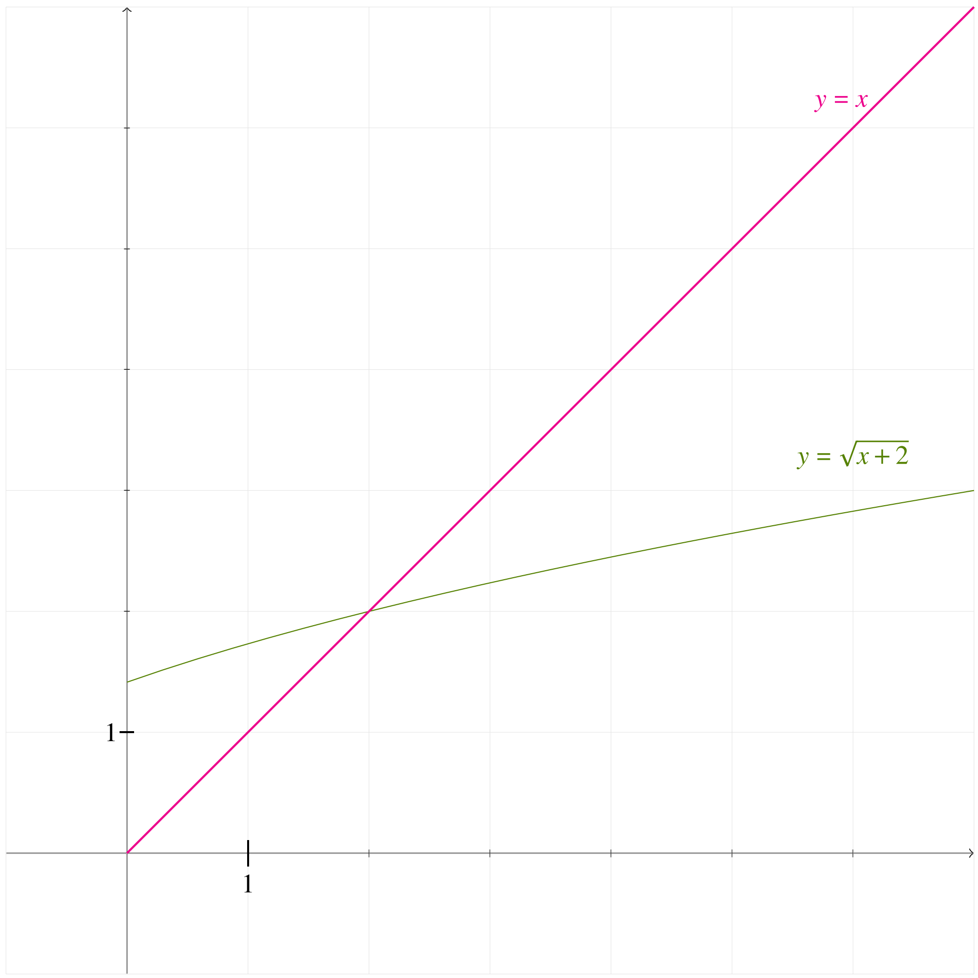
$$\ell = \sqrt{2+\ell}$$

$$\begin{aligned}
\ell = \sqrt{2+\ell} \quad &\Longleftrightarrow \quad \ell^2 = 2+\ell \qquad \text{car les deux termes de l'égalité sont positifs} \\
&\Longleftrightarrow \quad \ell^2 - \ell + 2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \cancel{\ell = -1} \text{ ou } \ell = 2 \qquad \text{en résolvant l'éq. du second degré} \\
&\Longleftrightarrow \quad \ell = 2 \qquad \text{car } \ell \in [0,2]
\end{aligned}$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers 2.}}$

Annexe 1, à rendre avec la copie

Nom Prénom :



Exercice 3 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|x+3|+|3x-1|<4$$

On pourra raisonner par disjonction de cas.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre

$$|x+3|+|3x-1|<4$$

On peut commencer par tracer le tableau de signes des polynômes $x \mapsto x+3$ et $x \mapsto 3x-1$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	

- Si $x \leq -3$, alors $x+3 \leq 0$ et $3x-1 \leq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |x+3|+|3x-1|<4 &\iff -(x+3)-(3x-1)<4 \\ &\iff -4x-2<4 \\ &\iff -4x<6 \\ &\iff x>-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est

$$]-\frac{3}{2},+\infty[\cap]-\infty,-3]=\varnothing$$

- Si $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$, alors $x+3 \geq 0$ et $3x-1 \leq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |x+3|+|3x-1|<4 &\iff (x+3)-(3x-1)<4 \\ &\iff -2x+4<4 \\ &\iff -2x<0 \\ &\iff x>0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est

$$]0,+\infty[\cap[-3,\frac{1}{3}]=]0,\frac{1}{3}]$$

- Si $x \geq \frac{1}{3}$, alors $x+3 \geq 0$ et $3x-1 \geq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |x+3|+|3x-1|<4 &\iff (x+3)+(3x-1)<4 \\ &\iff 4x+2<4 \\ &\iff 4x<2 \\ &\iff x<\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est

$$]-\infty,2[\cap[\frac{1}{3},+\infty]=[\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$$

Finalement, l'ensemble des solutions est donné par

$$\varnothing\cup]0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{3},\frac{1}{2}[\ \boxed{=]0,\frac{1}{2}[}$$