Activité pour temporiser

Exercice 1 – Étude d'une suite. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

1. Calculer u_1.
2. Recopier et compléter le programme suivant qui permet de créer une fonction, appelée `listesuite`, qui prend en argument un entier `n` et qui renvoie une liste contenant tous les termes de la suite (depuis u_0) jusqu'au terme de rang `n` (jusqu'à u_n).

```
#On définit une fonction
......................................
    #On introduit une liste vide
    ........................
    #On créé une variable appelée u
    #qui contient la valeur de u0 au départ
    ...............
    #On ajoute la valeur de u0 à la liste
    ................
    for k in range(...., .....):
        #On calcule le terme d'après de la suite
        #à partir du terme précédent
        ........................
        #et on l'ajoute à la liste
        .......................
    #On renvoie la liste complète
    ........................
```

3. On suppose qu'une fois le programme précédent complété de manière adéquate, la fonction `listesuite` évaluée en 5 renvoie la liste suivante.

```
[1.5, 1.25, 1.0625, 1.00390625,
1.0000152587890625, 1.0000000002328306]
```

   À partir de ce résultat, que peut-on conjecturer sur le caractère borné, la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$.
   (b) À l'aide de la question 5a, montrer par récurrence que,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [1, 2]$$
5. (a) Montrer que,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on notera ℓ.
   (b) Donner une équation vérifiée par la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Donner un encadrement de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Montrer que la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie également
   $$\ell \leqslant \frac{3}{2}$$
   (e) En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.