Activité pour temporiser (Correction)

Exercice 1 – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

1. Calculer u_1.

   En utilisant la **relation de récurrence**, on a,

   $$\boxed{u_1} = u_0^2 - 2u_0 + 2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\times\frac{3}{2} + 2 \boxed{= \frac{5}{4}}$$

2. À l'aide des commentaires, recopier (sur votre copie) et compléter le programme suivant qui permet de créer une fonction, appelée `listesuite`, qui prend en argument un entier `n` et qui renvoie la liste de tous les termes de la suite (depuis u_0) jusqu'au terme de rang `n` (jusqu'à u_n).

```python
def listesuite(n):
    L=[]
    u = 3/2
    L.append(u)
    for k in range(1, n+1):
            u=u**2-2*u+2
            L.append(u)
    return L
```

3. On suppose qu'une fois le programme précédent complété de manière adéquate, la fonction `listesuite` évaluée en 5 renvoie la liste suivante.

```
[1.5, 1.25, 1.0625, 1.00390625,
1.0000152587890625, 1.0000000002328306]
```

   Que conjecture-t-on sur le caractère borné, la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   On conjecture que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{bornée}}$ (majorée par 1.5 et minorée par 1), que la suite est $\boxed{\text{décroissante}}$ et qu'elle $\boxed{\text{converge vers 1}}$.

4. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. En **développant** l'identité remarquable puis en utilisant **la relation de récurrence**, on a,

   $$\boxed{(u_n - 1)^2 + 1} = u_n^2 - 2u_n + 1 + 1 = u_n^2 - 2u_n + 2 \boxed{= u_{n+1}}$$

(b) À l'aide de la question précédente, montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [1,2]$$

Montrons par **récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathbb{P}(n) \qquad "u_n \in [1,2]"$$

est vraie.

- Initialisation. Montrons que $\mathbb{P}(0)$ est vraie. D'après l'énoncé, $u_0 = 3/2 \in [1,2]$. Donc $\mathbb{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité.
  On suppose que $\mathbb{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que
  $$u_n \in [1,2]$$
  Montrons que $\mathbb{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que
  $$u_{n+1} \in [1,2]$$
  D'après la *question* ***5a***, on a
  $$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$
  Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a
  $$\begin{array}{lll} & 1 \leqslant u_n \leqslant 2 & \\ \text{donc} & 0 \leqslant u_n - 1 \leqslant 1 & \\ \text{donc} & 0 \leqslant (u_n-1)^2 \leqslant 1 & \text{car la fct } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } [0,+\infty[\\ \text{donc} & 1 \leqslant (u_n-1)^2 + 1 \leqslant 2 & \\ \text{c-a-d} & 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2 & \text{d'après la } \textit{question } 5\text{a} \end{array}$$
  Donc $\mathbb{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [1,2].}$$

5. (a) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant **la relation de récurrence**, on a,

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$$

D'autre part, en développant, on obtient,

$$(u_n - 2)(u_n - 1) = u_n^2 - u_n - 2u_n + 2 = u_n^2 - 3u_n + 2$$

Donc finalement,

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)}$$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *D'après la question* ***6a***, on a

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

Or, *d'après la question* ***5b***, on a

$$1 \leqslant u_n \leqslant 2$$

Donc, en particulier, on a

$$u_n - 2 \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad u_n - 1 \geqslant 0$$

Donc,

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1) \leqslant 0$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

Donc, la $\boxed{\text{suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

6. (a) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on notera ℓ.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 1, *d'après la question 5b*) et décroissante (*d'après la question 6b*). Donc, **par théorème de la limite monotone**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une $\boxed{\text{limite finie}}$ que l'on note ℓ.

(b) Donner une équation vérifiée par la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la **relation de récurrence** suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

Or, *d'après la question 7a*, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Donc, en passant à la limite dans cette relation, on obtient,

$$\boxed{\ell = \ell^2 - 2\ell + 2}$$

(c) Donner un encadrement de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après la question 5b, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'inégalité suivante. Or, *d'après la question 7a*, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Donc, en passant à la limite dans cette relation, on obtient,

$$\boxed{1 \leqslant \ell \leqslant 2}$$

(d) Montrer qu'en fait la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\ell \leqslant \frac{3}{2}$$

D'après la question 6b, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant u_0 = \frac{3}{2}.$$

Or, *d'après la question 7a*, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Donc, en passant à la limite dans cette relation, on obtient,

$$\boxed{\ell \leqslant \tfrac{3}{2}}$$

(e) En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'*d'après la question 7b*, la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation

$$\ell = \ell^2 - 2\ell + 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell^2 - 3\ell + 2 = 0$$

C'est une **équation du second degré** dont le discriminant vaut $\Delta = 1 > 0$ donc l'équation admet deux racines réelles, qui sont 1 et 2. Or d'après la question 7d, la limite vérifie

$$\ell \leqslant \frac{3}{2}$$

Donc nécessairement, $\ell = 1$. Ainsi, la $\boxed{\text{suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 1.}}$