TD 19 – Suites Récurrentes

1 Intervalle de stabilité

Exercice 1 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+2}$$

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

1. Montrer que l'intervalle $]0,1[$ est stable par f.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in]0,1[$.

Exercice 2 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}$$

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}$.

1. Montrer que l'intervalle $]0,1]$ est stable par f.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.

2 Étude de la monotonie

Exercice 3 – Avec la Méthode 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$.
   (b) À l'aide de la question précédente, montrer par récurrence que,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [1,2]$$
2. (a) Dresser le tableau de signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 4 – Avec la Méthode 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \exp(u_n)$$

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

3 Convergence grâce au théorème de la limite monotone [Méthode 3]

Exercice 5 – Convergence vers une limite finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. Monter que $\varphi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ (≈ 1.6) est un point fixe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,\varphi]$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ.
5. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Exercice 6 – Divergence. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant $u_0 > 0$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. En déduire qu'il existe seulement deux comportements possibles pour la convergence de la suite.
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente vers $+\infty$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

4 Étude grâce à l'IAF [Méthode 4]

Exercice 7 – On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2)$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - \frac{1}{4}u_n) + \frac{1}{2}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.
3. Déterminer les points fixes de la fonction f.
4. (a) Montrer que
   $$\forall x \in [1,2], \qquad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$
   (b) En déduire que
   $$\forall a,b \in [1,2], \qquad |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|$$
   (c) En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|.$$
5. Montrer par récurrence que,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \sqrt{2}|$$
6. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
7. À partir de quel rang n a-t-on $|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-9}$?

Exercice 8 – Avec un point fixe abstrait. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}.$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. (a) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Montrer, grâce au théorème de la bijection que g réalise une bijection de $]0,1[$ vers un intervalle à déterminer.
   (b) En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que
   $$f(\alpha) = \alpha.$$
   On admet que $\frac{e}{e+1} - 1 \approx -0.26$. *On ne demande pas ici de déterminer la valeur de* α.

3. (a) Montrer que la dérivée de f est bornée sur $[0,1]$.
   (b) En déduire que
$$\forall a,b \in [0,1], \qquad |f(b)-f(a)| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|b-a|$$
   (c) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n-\alpha|.$$
4. Montrer par récurrence que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0-\alpha|$$
5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

5 Approfondissement

Exercice 9 – Ecricome 2023, Maths E. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$
On rappelle que $2<\mathrm{e}<3$.

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$:
$$f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$$
   (b) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
   (d) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , l'équation $f(x)=n$, d'inconnue x dans $]0,+\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n, avec:
$$0<u_n<1<v_n.$$
2. (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.
   (b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge. Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.
   (c) Montrer par l'absurde que $\ell=0$.
   (d) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$ puis un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10 – Lorsque la fonction est décroissante.... On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 1+\frac{1}{u_n}$$
Soit $I=[1,2]$. Pour tout $x\in I$, on pose $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ et $g=f\circ f$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in I$.
2. Justifier que f est strictement décroissante sur I et que g est strictement croissante sur I.
3. Vérifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=g(u_n)$ et en déduire que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Préciser leurs limites.
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 11 – Suites définies de manière implicite. On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^x-x$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. En déduire que, pour tout $n\geq 2$, l'équation $\mathrm{e}^x=x+n$ admet exactement deux solutions réelles x_n et y_n telles que
$$x_n<0<y_n$$
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
4. En déduire, par un raisonnement par l'absurde, que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ diverge vers $-\infty$.
5. Étudier de même la convergence de la suite $(y_n)_{n\geq 2}$

Exercice 12 – Ecricome 2022 Maths E. Pour tout réel $x>0$, on pose :
$$g(x) = \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

1. Déterminer
$$\lim_{x\to 0^+} g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)$$
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\forall x>0, \quad h(x)=\ln(x)+2x-1$$
   (a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha>0$ tel que $h(\alpha)=0$.
   (c) Justifier que $\frac{1}{2}<\alpha<1$.
   (d) Démontrer que :
$$\forall x>0, \quad g'(x) = \frac{1}{x^2}h(x)g(x)$$
   (e) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0>0$ et la relation de récurrence :
$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad u_{n+1}=g(u_n).$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n>0$.
4. (a) Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x>0$.
   (b) Montrer que
$$\forall x>0, \qquad \frac{g(x)}{x} \geqslant 1.$$
   On pourra utiliser que, pour tout $x>0$, $x=\exp(\ln(x))$.
   (c) En déduire que pour tout réel $x>0$, on a $g(x)\geqslant x$ et que l'équation $g(x)=x$ admet 1 comme unique solution.
5. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.
   (a) Démontrer que
$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad u_n\in\left[\frac{1}{2},1\right]$$
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0>1$.
   (a) Démontrer que
$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad u_n>1$$
   (b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.