TD 19 – Suites Récurrentes (Correction)

1 Intervalle de stabilité

Exercice 1 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+2}$$

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

1. Montrer que l'intervalle $]0,1[$ est stable par f.

   $\boxed{\text{Soit } x \in]0,1[}$. Montrons que $f(x) \in]0,1[$. D'une part, on a

   $$\begin{aligned} 0 &< x < 1 \\ \text{donc } 1 &< x+1 < 2 \end{aligned}$$

   D'autre part,

   $$\begin{aligned} &0 < x < 1 \\ \text{donc } &2 < x+2 < 3 \\ \text{donc } &\frac{1}{3} < \frac{1}{x+2} < \frac{1}{2} \qquad \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ strictement décroissante sur }]0,+\infty[\end{aligned}$$

   En multipliant les deux inégalités obtenues, on a,

   $$\frac{1}{3} < \frac{x+1}{x+2} < 1$$

   et donc en particulier,

   $$0 < \frac{x+1}{x+2} < 1$$

   c'est-à-dire

   $$\boxed{0 < f(x) < 1}$$

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in]0,1[$.

   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) la propriété « u_n existe et $u_n \in]0,1[$. »

   - *Initialisation:* D'après l'énoncé, $u_0 = \frac{1}{2} \in]0,1[$. D'où (P_0) vraie.
   - *Hérédité:* On suppose que (P_n) est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que (P_{n+1}) est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \in]0,1[$. En particulier, $u_n \neq -2$. Or, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. Donc, $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. De plus, comme $u_n \in]0,1[$, par stabilité de l'intervalle $]0,1[$ par f, $u_{n+1} = f(u_n) \in]0,1[$. Donc (P_{n+1}) est vraie.
   - *Conclusion:* Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \in]0,1[.}$

Exercice 2 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}$$

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}$.

1. Montrer que l'intervalle $]0,1]$ est stable par f.

   $\boxed{\text{Soit } x \in]0,1]}$. Montrons que $f(x) \in]0,1]$. D'une part, on a

$$\begin{aligned} &0 < x \leq 1 \\ &\text{donc } 0 < \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{car } \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

   D'autre part,

$$\begin{aligned} &0 < x \leq 1 \\ &\text{donc } 0 < x^2 \leq 1 \qquad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ strictement croissante sur } [0,+\infty[\\ &\text{donc } 0 < \frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{car } \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

   En additionnant les deux inégalités obtenues, on a,

$$0 < \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} \leq 1$$

   c'est-à-dire

$$\boxed{0 < f(x) \leq 1}$$

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.

   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) la propriété « $u_n \in]0,1]$. »

   - *Initialisation:* D'après l'énoncé, $u_0 = 1 \in]0,1]$. D'où (P_0) vraie.
   - *Hérédité:* On suppose que (P_n) est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que (P_{n+1}) est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \in]0,1]$, donc par stabilité de l'intervalle $]0,1]$ par f, $u_{n+1} = f(u_n) \in]0,1]$. Donc (P_{n+1}) est vraie.
   - *Conclusion:* Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1].}$

2 Étude de la monotonie

Exercice 3 – Avec la Méthode 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. En **développant** l'identité remarquable puis en utilisant **la relation de récurrence**, on a,

   $$\boxed{(u_n-1)^2+1} = u_n^2 - 2u_n + 1 + 1 = u_n^2 - 2u_n + 2 \boxed{= u_{n+1}}$$

   (b) À l'aide de la question précédente, montrer par récurrence que,

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [1,2]$$

   Montrons par **récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

   $$\mathscr{P}(n) \qquad "u_n \in [1,2]"$$

   est vraie.

   - Initialisation. Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. D'après l'énoncé, $u_0 = 3/2 \in [1,2]$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité.

     On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que

     $$u_n \in [1,2]$$

     Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

     $$u_{n+1} \in [1,2]$$

     D'après la *question précédente*, on a

     $$u_{n+1} = (u_n-1)^2 + 1$$

     Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

     $$\begin{array}{lll} & 1 \le u_n \le 2 & \\ \text{donc} & 0 \le u_n - 1 \le 1 & \\ \text{donc} & 0 \le (u_n-1)^2 \le 1 & \text{car la fct } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } [0,+\infty[\\ \text{donc} & 1 \le (u_n-1)^2 + 1 \le 2 & \\ \text{c-a-d} & 1 \le u_{n+1} \le 2 & \text{d'après la } \textit{question} \text{ précédente} \end{array}$$

     Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire

     $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [1,2].}$$

2. (a) Dresser le tableau de signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

   Tout d'abord,

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - x = x^2 - 2x + 2 - x = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

   On en déduit ainsi le tableau de signe de $x \mapsto f(x) - x$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

On sait que

a) $\forall x \in [1,2], f(x)-x \leq 0$ b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1,2]$

Donc, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n \leq 0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{décroissante.}}$

Exercice 4 – Avec la Méthode 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \exp(u_n)$$

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Montrons par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) la propriété « $u_n \leq u_{n+1}$. »

- *Initialisation:* D'après l'énoncé, $u_0 = 0$ et on peut calculer grâce à la relation de récurrence que $u_1 = \exp(u_0) = \exp(0) = 1$. Donc $u_0 \leq u_1$. D'où (P_0) vraie.
- *Hérédité:* On suppose que (P_n) est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que (P_{n+1}) est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que

  $$u_n \leq u_{n+1}$$

  Or, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ (propriété sur la fonction exponentielle) Donc,

  $$f(u_n) \leq f(u_{n+1})$$

  c'est-à-dire

  $$u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

  Donc (P_{n+1}) est vraie.
- *Conclusion:* Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}.}$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc $\boxed{\text{croissante.}}$

3 Convergence grâce au théorème de la limite monotone [Méthode 3]

Exercice 5 – Convergence vers une limite finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. Monter que $\varphi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ (≈ 1.6) est un point fixe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

   Comme $\varphi \geq 0$,
   $$\sqrt{\varphi+1} = \varphi \iff \varphi + 1 = \varphi^2$$
   Puis, on montre que
   $$\varphi^2 = \varphi + 1$$
   ...

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,\varphi]$.

   Montrons par **récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété
   $$\mathscr{P}(n) \qquad \text{"}u_n \text{ existe et } u_n \in [1,\varphi]\text{"}$$
   est vraie.

   - Initialisation. Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. D'après l'énoncé, $u_0 = 1 \in [1,\varphi]$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité.

     On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que
     $$u_n \text{ existe et } u_n \in [1,\varphi]$$
     Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que
     $$u_{n+1} \text{ existe et } u_n \in [1,\varphi]$$

     D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \in [1,\varphi]$. En particulier, $u_n \geq -1$. Or la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est définie sur $[-1,+\infty[$. Donc la quantité $f(u_n)$ est bien définie, c'est-à-dire u_{n+1} existe. De plus, en utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence, on a
     $$\begin{array}{lll} & 1 \leq u_n \leq \varphi & \\ \text{donc} & 2 \leq u_n + 1 \leq \varphi + 1 & \\ \text{donc} & \sqrt{2} \leq \sqrt{u_n+1} \leq \sqrt{\varphi+1} & \text{car la fct } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } [0,+\infty[\\ \text{donc} & \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \varphi & \\ \text{à fortiori} & 1 \leq u_{n+1} \leq \varphi & \end{array}$$
     Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire
     $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \text{ existe et } u_n \in [\varphi, 1]}$$

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   En étudiant la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x} - x$, on peut montrer que son tableau de signe est donné par

x	-1		$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

   Or, on sait que

   a) $\forall x \in [\varphi,1], f(x) - x \geq 0$ b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\varphi,1]$

Donc, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{croissante.}}$

4. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ.

   D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est... Donc, d'après le **théorème de la limite monotone**, la suite (u_n) $\boxed{\text{converge vers un réel } \ell.}$

5. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

   D'après la question précédente, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$$

   Donc, en passant à la limite, on obtient que

$$\ell = \sqrt{1+\ell}$$

   c'est-à-dire (la résolution de cette équation a déjà été menée dans le cours)

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

   Donc, la suite (u_n) $\boxed{\text{converge vers } \frac{1+\sqrt{5}}{2}.}$

Exercice 6 – Divergence. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant $u_0 > 0$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

   Montrons par **récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

   $$\mathscr{P}(n) \qquad "u_n > 0"$$

   est vraie.

   - Initialisation. Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. D'après l'énoncé, $u_0 > 0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité.

     On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que

     $$u_n > 0$$

     Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

     $$u_{n+1} > 0$$

     D'après la *question précédente*, on a

     $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

     Or, d'une part, d'après l'hypothèse de récurrence,

     $$u_n > 0$$

     et donc

     $$\frac{1}{u_n} > 0$$

     (comme quotient de deux termes strictement positifs). Donc, en tant que somme de deux termes strictement positifs,

     $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > 0$$

     Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire

     $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n > 0}$$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   On a, en utilisant la question précédente que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$$

   Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{croissante.}}$

3. En déduire qu'il existe seulement deux comportements possibles pour la convergence de la suite.
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente vers $+\infty$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

   Résolution des Questions 3 et 4 ensemble. D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc, d'après le théorème de la convergence monotone,

   - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie.
   - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

   Supposons par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.

- Premier cas. Si $\ell \neq 0$, comme,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

en passant à la limite, on obtient

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$$

soit

$$0 = \frac{1}{\ell}$$

ce qui est absurde.

- Deuxième cas. Si $\ell = 0$, comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq u_0$$

et en passant à la limite, on obtient,

$$0 \geq u_0$$

Ce qui est absurde car l'énoncé indique que $u_0 > 0$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas admettre une limite finie. Donc nécessairement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{diverge vers } +\infty.}$

4 Étude grâce à l'IAF [Méthode 4]

Exercice 7 – On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2-u_n^2)$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{4}(2-x^2)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1-\frac{1}{4}u_n) + \frac{1}{2}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.

   Montrons par **récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

   $$\mathscr{P}(n) \qquad "u_n \in [1,2]"$$

   est vraie.

   - Initialisation. Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. D'après l'énoncé, $u_0 = 1 \in [1,2]$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité.

     On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que

     $$u_n \in [1,2]$$

     Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

     $$u_{n+1} \in [1,2]$$

     D'une part, d'après l'hypothèse de récurrence,

     $$1 \le u_n \le 2$$

     D'autre part, en utilisant de nouveau l'hypothèse de récurrence, on a

     $$\begin{array}{ll} & 1 \le u_n \le 2 \\ \text{donc} & -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{4}u_n \le -\frac{1}{4} \\ \text{donc} & \frac{1}{2} \le 1-\frac{1}{4}u_n \le \frac{3}{4} \end{array}$$

     Donc, en multipliant les deux inégalités, on obtient,

     $$\frac{1}{2} \le u_n(1-\frac{1}{4}u_n) \le \frac{3}{2}$$

     donc,

     $$1 \le u_n(1-\frac{1}{4}u_n) + \frac{1}{2} \le 2$$

     c'est-à-dire

     $$1 \le u_{n+1} \le 2$$

     Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire

     $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [1,2].}$$

3. Déterminer les points fixes de la fonction f.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a,

   $$f(x) = x \iff x + \frac{1}{4}(2-x^2) = x \iff \frac{1}{4}(2-x^2) = 0 \iff x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

   La fonction f admet deux points fixes qui sont $\boxed{\pm\sqrt{2}.}$

4. (a) Montrer que

   $$\forall x \in [1,2], \qquad |f'(x)| \le \frac{1}{2}$$

Tout d'abord, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que fonction polynomiale) et sa dérivée vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x$$

Soit $x \in [1,2]$. On a,

$$\begin{aligned} &1 \leq x \leq 2 \\ \text{donc } &\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x \leq 1 \\ \text{donc } &-1 \leq -\frac{1}{2}x \leq -\frac{1}{2} \\ \text{donc } &0 \leq 1 - \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2} \\ \text{c-a-d } &0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On obtient donc en particulier que la dérivée est positive et bornée par $\frac{1}{2}$ sur $[1,2]$ et donc,

$$\boxed{\forall x \in [1,2], \qquad |f'(x)| = f'(x) \leq \frac{1}{2}}$$

(b) En déduire que

$$\forall a,b \in [1,2], \qquad |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|$$

On applique l'**inégalité des accroissements finis** à la fonction f car
① La fonction f est **dérivable** sur $[1,2]$.
② Il existe $k = \frac{1}{2} \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in [1,2]$, on a $|f'(x)| \leqslant k$.
Donc,

$$\boxed{\forall (a,b) \in [1,2], \qquad |f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}|b-a|.}$$

(c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $b = u_n$ et $a = \sqrt{2}$ dans l'inégalité précédente (car u_n et $\sqrt{2}$ appartiennent à $[1,2]$), comme $f(u_n) = u_{n+1}$ (par construction) et $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ (cf Question 2), on obtient

$$\boxed{|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|.}$$

5. Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \sqrt{2}|$$

Montrons par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathscr{P}(n) : \text{ « } |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \sqrt{2}| \text{ ».}$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_0 - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |1 - \sqrt{2}|$$

D'après l'énoncé, $u_0 = 1$. Donc, la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\sqrt{2}|$$

On veut montrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |1-\sqrt{2}|$$

D'après l'IAF, (Question 3(c)) on sait que

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|.$$

Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \sqrt{2}| &\leqslant \frac{1}{2} \times |u_n - 2| \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\sqrt{2}| \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |1-\sqrt{2}| \end{aligned}$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\sqrt{2}|}$$

6. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

On vient de démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\sqrt{2}|$$

Or, par propriété sur les suites géométriques, on a

$$\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \text{car} \qquad -1 < \frac{1}{2} < 1.$$

Donc, par théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.}$$

7. À partir de quel rang n a-t-on $|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-9}$?

On a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\sqrt{2}|$$

Donc, si $\left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\sqrt{2}| \leq 10^{-9}$ alors à fortiori, $|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-9}$. Or,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\sqrt{2}| \leq 10^{-9} &\iff n\ln(\frac{1}{2}) + \ln(|1-\sqrt{2}|) \leq \ln(10^{-9}) \\ &\iff n\ln(\frac{1}{2}) \leq \ln(10^{-9}) - \ln(|1-\sqrt{2}|) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(10^{-9}) - \ln(|1-\sqrt{2}|)}{\ln(\frac{1}{2})} \qquad \text{car } \ln(\frac{1}{2}) < 0 \end{aligned}$$

Donc, il suffit de prendre

$$\boxed{n = \lfloor \frac{\ln(10^{-9}) - \ln(|1-\sqrt{2}|)}{\ln(\frac{1}{2})} \rfloor + 1 = 29}$$

Exercice 8 – Avec un point fixe abstrait. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}.$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

   Il n'est pas nécessaire ici de se lancer dans une récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part, par positivité de l'exponentielle,

   $$e^{u_n} > 0 \qquad \text{et} \qquad e^{u_n}+1 > 0$$

   Donc, comme quotient de deux termes strictement positifs,

   $$u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1} > 0$$

   De plus, on a aussi immédiatement,

   $$e^{u_n} \leq e^{u_n}+1$$

   et donc,

   $$u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1} \leq 1$$

   Ainsi, on vient de démontrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \in [0,1]$$

   c'est-à-dire que la propriété est vraie pour $u_1, u_2, \ldots$. Comme $u_0 = 0$, la propriété est aussi vraie au rang 0. Donc finalement,

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [0,1]}$$

2. (a) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Montrer, grâce au théorème de la bijection que g réalise une bijection de $]0,1[$ vers un intervalle à déterminer.

   - L'ensemble $]0,1[$ est un **intervalle**.
   - La fonction g est **continue** sur $]0,1[$.
   - La fonction g est dérivable sur $]0,1[$ et

   $$\forall x \in]0,1[, \qquad g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} - 1 = \frac{-e^{2x} - e^x - 1}{(e^x+1)^2} < 0$$

   Donc g est **strictement décroissante** sur $]0,1[$.

   Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction g réalise une

   $$\boxed{\text{bijection de }]0,1[\text{ vers } \left]\frac{e}{e+1} - 1, \frac{1}{2}\right[}$$

   (car $g(0) = \frac{1}{2}$ et $g(1) = \frac{e}{e+1} - 1$).

   (b) En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que

   $$f(\alpha) = \alpha.$$

   On admet que $\frac{e}{e+1} - 1 \approx -0.26$. *On ne demande pas ici de déterminer la valeur de* α.

D'après la question précédente, la fonction g réalise une bijection de $]0,1[$ vers $]\frac{e}{e+1}-1,\frac{1}{2}[$, c'est-à-dire

$$\forall y \in]\frac{e}{e+1}-1,\frac{1}{2}[, \qquad \exists! \alpha \in]0,1[, \qquad y = g(\alpha).$$

Comme $\frac{e}{e+1}-1 \approx -0.26$, on peut prendre en particulier $y=0 \in]\frac{e}{e+1}-1,\frac{1}{2}[$ et on obtient,

$$\exists! \alpha \in]0,1[, \qquad 0 = g(\alpha).$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\exists! \alpha \in]0,1[, \qquad \alpha = f(\alpha)}$$

3. (a) Montrer que la dérivée de f est bornée sur $[0,1]$.

Tout d'abord, la fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in [0,1], \qquad f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

On remarque que la dérivée est positive sur $[0,1]$ et donc

$$\forall x \in [0,1], \qquad |f'(x)| = f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

Soit $x \in [0,1]$. D'une part (estimation du dénominateur), on a,

$$\begin{array}{lll} & 0 \leq x \leq 1 & \\ \text{donc} & 1 \leq e^x \leq e & \text{car } x \mapsto e^x \text{ croissante sur } \mathbb{R} \\ \text{donc} & 2 \leq e^x+1 \leq e+1 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{e+1} \leq \dfrac{1}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{2} & \text{car } x \mapsto \dfrac{1}{x} \text{ décroissante sur }]0,+\infty[\\ \text{donc} & \dfrac{1}{(e+1)^2} \leq \dfrac{1}{(e^x+1)^2} \leq \dfrac{1}{4} & \text{car } x \mapsto x^2 \text{ croissante sur } [0,+\infty[\end{array}$$

D'autre part (estimation du numérateur), on a déjà démontré que

$$1 \leq e^x \leq e$$

Donc, en multipliant les inégalités, on obtient

$$\frac{1}{(e+1)^2} \leq \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \leq \frac{e}{4}$$

En particulier, on a montré que

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \qquad |f'(x)| = f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \leq \frac{e}{4}}$$

$\boxed{\text{La dérivée de } f \text{ est bornée sur } [0,1].}$

(b) En déduire que

$$\forall a,b \in [0,1], \qquad |f(b)-f(a)| \leq \frac{e}{4}|b-a|$$

On applique l'**inégalité des accroissements finis** à la fonction f car

① La fonction f est **dérivable** sur $[0,1]$.

② Il existe $k = \frac{e}{4} \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, on a $|f'(x)| \leqslant k$.

Donc,

$$\boxed{\forall (a,b) \in [0,1], \qquad |f(b)-f(a)| \leqslant \frac{e}{4}|b-a|}$$

(c) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n - \alpha|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $b = u_n$ et $a = \alpha$ dans l'inégalité précédente (car u_n et α appartiennent à $[0,1]$), comme $f(u_n) = u_{n+1}$ (par construction) et $f(\alpha) = \alpha$ (cf Question 2(b)), on obtient
$$\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n - \alpha|}$$

4. Montrer par récurrence que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

Montrons par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie
$$\mathscr{P}(n): \text{ « } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| \text{ ».}$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^0 |u_0 - \alpha|$$
D'après l'énoncé, $u_0 = 0$. Donc, la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$
On veut montrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$
D'après l'IAF, (Question 3(c)) on sait que
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n - \alpha|.$$
Donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a
$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leqslant \frac{\mathrm{e}}{4} \times |u_n - \alpha| \\ &\leqslant \frac{\mathrm{e}}{4} \times \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| \\ &\leqslant \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha| \end{aligned}$$
Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|}$$

5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

On vient de démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$
Or, par propriété sur les suites géométriques, on a
$$\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n = 0 \qquad \text{car} \qquad -1 < \frac{\mathrm{e}}{4} < 1.$$
Donc, par théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$$

5 Approfondissement

Exercice 9 – Ecricome 2023, Maths E. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

On rappelle que $2 < \mathrm{e} < 3$.

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$$

   (b) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

   (d) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0,+\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n, avec:

$$0 < u_n < 1 < v_n.$$

2. (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

   (b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge. Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

   (c) Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

   (d) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$ puis un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10 – Lorsque la fonction est décroissante.... On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

Soit $I = [1,2]$. Pour tout $x \in I$, on pose $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et $g = f \circ f$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

Montrons par **récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(n) \qquad \text{"}u_n \text{ existe et } u_n \in I\text{"}$$

est vraie.

- Initialisation. Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. D'après l'énoncé, $u_0 = 1 \in I$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité.
  On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que

$$u_n \text{ existe et } u_n \in I$$

  Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$u_{n+1} \text{ existe et } u_n \in I$$

  D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \in I$. En particulier, $u_n \neq 0$. Or la fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Donc la quantité $f(u_n)$ est bien définie, c'est-à-dire u_{n+1} existe. De plus, en utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{array}{lll} & 1 \leq u_n \leq 2 & \\ \text{donc} & \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1 & \text{car la fct } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[\\ \text{donc} & \frac{3}{2} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \leq 2 & \\ \text{c-a-d} & \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2 & \\ \text{a fortiori} & 1 \leq u_{n+1} \leq 2 & \end{array}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \text{ existe et } u_n \in I}$$

2. Justifier que f est strictement décroissante sur I et que g est strictement croissante sur I.

- La fonction f est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

  Donc la fonction $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } I.}$
- Tout d'abord,

$$\forall x \in I, \qquad g(x) = f(f(x)) = 1 + \frac{1}{f(x)} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1}$$

  Ainsi, la fonction g est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \qquad g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \geq 0$$

  Donc la fonction $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } I.}$

3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = g(u_n)$ et en déduire que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Préciser leurs limites.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut commencer par remarquer que

$$g(u_n) = f(f(u_n)) = f(u_{n+1}) = u_{n+2}$$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$, on obtient que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = g(v_n).$$

- On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, donc en tant que suite extraite, on récupère que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in I$. En particulier, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.
- De plus, on peut calculer que $v_0 = u_0 = 1$ et $v_1 = u_2 = \frac{3}{2}$. Ainsi, $v_0 \leq v_1$. Et la fonction g est croissante sur I. On peut montrer par récurrence (voir par exemple Exercice 4) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1}$, c'est-à-dire la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Ainsi, d'après le **théorème de la limite monotone**, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = g(v_n) = 1 + \frac{u_n}{u_n + 1}$$

Donc, en passant à la limite, on obtient que

$$\ell = 1 + \frac{\ell}{\ell + 1}$$

En résolvant l'équation, on en déduit que

$$\ell = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \text{ou} \qquad \ell = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Or, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [1,2]$ et donc, en passant à la limite, $\ell \in [1,2]$. Donc nécessairement,

$$\ell = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire la suite $\boxed{(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.}$
On montre de même que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.

4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

Les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et admettent la même limite qui est $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, la suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est converge aussi vers } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.}$

Exercice 11 – Suites définies de manière implicite. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.

1. Dresser le tableau de variations de f.

   On a,
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = e^x - 1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. En déduire que, pour tout $n \geq 2$, l'équation $e^x = x + n$ admet exactement deux solutions réelles x_n et y_n telles que
   $$x_n < 0 < y_n$$

   Montrons que la fonction f réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ sur un intervalle à déterminer.
   - L'ensemble $]-\infty, 0[$ est un **intervalle**.
   - La fonction g est **continue** sur $]-\infty, 0[$.
   - D'après le tableau de variations, la fonction f est **strictement décroissante** sur $]-\infty, 0[$.

   Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une
   $$\boxed{\text{bijection de }]-\infty,0[\text{ vers }]1,+\infty[}$$
   (car $f(0) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$). En particulier,
   $$\forall y \in]1,+\infty[, \qquad \exists! x \in]-\infty,0[, \qquad y = f(x)$$
   Soit $n \geq 2$. En prenant $y = n \in]1,+\infty[$, on obtient
   $$\boxed{\exists! x_n \in]-\infty,0[, \qquad n = f(x_n)}$$
   autrement dit, l'équation $e^x - x = n$ admet une unique solution $x_n \in]-\infty,0[$. De même, on montre que la même équation admet une unique solution $y_n \in]-\infty,0[$ en montrant que f réalise cette fois-ci une bijection de $]0,+\infty[$ vers $]1,+\infty[$.

3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

   Soit $n \geq 2$. On sait que, par construction $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1$. De plus, on sait que
   $$n + 1 \geq n$$
   c'est-à-dire
   $$f(x_{n+1}) \geq f(x_n)$$
   Or, x_n et x_{n+1} sont dans $]-\infty,0[$ et la fonction f est décroissante sur $]-\infty,0[$, on en déduit que
   $$x_{n+1} \leq x_n$$
   Ainsi, la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est $\boxed{\text{décroissante.}}$

4. En déduire, par un raisonnement par l'absurde, que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ diverge vers $-\infty$.

   D'après la question précédente, suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante. Donc, d'après le théorème de la limite monotone,
   - soit la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ admet une limite finie,
   - soit la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ diverge vers $-\infty$.

Supposons par l'absurde que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. Or, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x_n) = n$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \mathrm{e}^{\ell} - \ell$$

par continuité de f sur $\mathbb{R}$. Par unicité de la limite, ceci est absurde. Donc nécessairement, la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ $\boxed{\text{diverge vers } -\infty.}$

5. Étudier de même la convergence de la suite $(y_n)_{n\geq 2}$

   On peut montrer de même que la suite $(y_n)_{n\geq 2}$ est croissante et qu'elle ne peut pas admettre de limite finie, donc nécessairement, d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(y_n)_{n\geq 2}$ $\boxed{\text{diverge vers } +\infty.}$

Exercice 12 – Ecricome 2022 Maths E. Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

- Déterminons d'abord la limite de g en 0^+. Tout d'abord, on sait que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to 0^+} 2 - \frac{1}{x} = -\infty$$

On sait également que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Donc, par produit,

$$\lim_{x\to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) = +\infty.$$

Puis par composition,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \boxed{= +\infty}$$

- Déterminons ensuite la limite de g en $+\infty$. Tout d'abord, on sait que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$$

On sait également que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

Donc, par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) = +\infty.$$

Puis par composition,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \boxed{= +\infty}$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1$$

(a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Tout d'abord, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto 2x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc à fortiori sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par somme, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est donnée par,

$$\forall x > 0, \qquad h'(x) = \frac{1}{x} + 2$$

On obtient donc directement que

$$\forall x > 0, \qquad h'(x) > 0.$$

Donc, $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

(b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$.

- La fonction h est définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- La fonction h est continue sur $]0, +\infty[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 2(a)).
- La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 2(a).

Donc, d'après le théorème de la bijection, la fonction h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur

$$]\lim_{x\to 0^+} h(x), \lim_{x\to +\infty} h(x)[$$

Or, on peut calculer directement par somme que

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$$

Donc, la fonction h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Or, $0 \in \mathbb{R}$.
Donc, $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in]0, +\infty[\text{ tel que } h(\alpha) = 0.}$

(c) Justifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Commençons par montrer que

$$h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) < h(1).$$

Grâce à l'expression de la fonction h, on peut calculer directement que

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) < 0 \qquad h(1) = 1 > 0$$

Or, par construction faite à la question 2(b), $h(\alpha) = 0$. Donc, on obtient bien que

$$h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) < h(1).$$

Puis, comme h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on obtient que

$$\boxed{\tfrac{1}{2} < \alpha < 1}$$

(d) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x) g(x)$$

Tout d'abord, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (en raisonnant comme à la question 2(a)). De plus, sa dérivée est donnée par,

$$\begin{aligned}
\boxed{\forall x > 0, \qquad g'(x)} &= \left(\frac{1}{x^2} \times \ln(x) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right) \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) + 2x - 1\right) \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \\
&\boxed{= \tfrac{1}{x^2} h(x) g(x)}
\end{aligned}$$

(e) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après la question 2(d), on a,

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x) g(x)$$

Or,
$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{x^2} > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x > 0, \qquad g(x) > 0$$
Donc, pour tout $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $h(x)$. Or, h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $h(\alpha) = 0$ (où α a été définie à la question 2(b)). Donc h est négative sur $]0, \alpha[$ et h est positive sur $]\alpha, +\infty[$. On peut en déduire le tableau de signe de g' et donc le tableau de variations de g de la manière suivante.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites présentes dans la tableau de variations de g ont été calculée à la question 1. Le calcul de $g(\alpha)$ n'a pas été effectué. On en déduit que

- $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est décroissante sur }]0, \alpha[,}$
- et $\boxed{\text{croissante sur }]\alpha, +\infty[.}$

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = g(u_n).$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie
$$\mathscr{P}(n) : \text{« } u_n \text{ existe et } u_n > 0 \text{ ».}$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$u_0 \text{ existe et } u_0 > 0.$$
D'après l'énoncé, $u_0 > 0$. Et donc, la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$u_n \text{ existe et } u_n > 0$$
On veut montrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$u_{n+1} \text{ existe et } u_{n+1} > 0$$
D'après l'énoncé, on sait que
$$u_{n+1} = g(u_n).$$
Or, $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence donc $g(u_n)$ (et donc u_{n+1} est bien défini). De plus, par propriété de l'exponentielle.
$$\forall x > 0, \qquad g(x) > 0.$$
Donc, en prenant $x = u_n$ dans cette inégalité (possible car $u_n > 0$), on obtient
$$u_{n+1} = g(u_n) > 0.$$
Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 0}$$

4. (a) Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x>0$.

On peut dresser le tableau de signe suivant, en regardant le signe de chacun des termes du produit.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln(x)$	$\|$	$+$	0	$+$	

De ce tableau de signe, on en déduit que

$$\boxed{\forall x>0, \qquad (x-1)\ln(x)\geqslant 0}$$

et

$$\boxed{(x-1)\ln(x)=0 \qquad \Leftrightarrow x=1.}$$

(b) Montrer que

$$\forall x>0, \qquad \frac{g(x)}{x}\geqslant 1.$$

On pourra utiliser que, pour tout $x>0$, $x=\exp(\ln(x))$.

Soit $x>0$. On a

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{x} &= \frac{\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)}{\exp(\ln(x))}\\ &= \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)-\ln(x)\right)\\ &= \exp\left(\ln(x)-\frac{\ln(x)}{x}\right)\\ &= \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right)\end{aligned}$$

Or, $x>0$ et d'après la question 5(a), $(x-1)\ln(x)\geqslant 0$. Donc

$$\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\geqslant 0$$

et par croissance de l'exponentielle

$$\exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right)\geqslant \exp(0).$$

Finalement, on a bien montré que

$$\boxed{\forall x>0, \qquad \frac{g(x)}{x}\geqslant 1.}$$

(c) En déduire que pour tout réel >0, on a $g(x)\geqslant x$ et que l'équation $g(x)=x$ admet 1 comme unique solution.

D'après la question 5(b),

$$\forall x>0, \qquad \frac{g(x)}{x}\geqslant 1.$$

Donc,

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad g(x) \geqslant x,}$$

car on a multiplié l'inégalité par une quantité positive. De plus, en reprenant les calculs de la question 5(b), on a, pour tout réel $x > 0$,

$$\boxed{\frac{g(x)}{x} = 1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)\ln(x)}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\ln(x) = 0 \quad \boxed{\Leftrightarrow \qquad x = 1,}$$

en utilisant le résultat de la question 5(a). Donc l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution donnée par $x = 1$.

5. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après la question 5(c), on sait que

$$\forall x > 0, \qquad g(x) \geqslant x.$$

Si on applique l'inégalité précédente à u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qui est possible car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ d'après la question 3), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad g(u_n) \geqslant u_n,$$

c'est-à-dire d'après la construction de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \geqslant u_n.$$

Donc, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

6. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   (a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathscr{P}(n) : \text{ « } u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ ».}$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

D'après l'énoncé, $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Et donc, la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

On veut montrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Premièrement, d'après la question 6, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc

$$u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant \frac{1}{2},$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. Deuxièmement, d'après l'énoncé,

$$u_{n+1} = g(u_n) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right)$$

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant 1$. Donc, par croissance du logarithme sur $]0,+\infty[$, on obtient

$$\ln(u_n) \leqslant \ln(1) = 0$$

De plus, comme $u_n \geqslant \frac{1}{2}$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, on en déduit que

$$2 - \frac{1}{u_n} \geqslant 0.$$

Donc,

$$\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n) \leqslant 0.$$

Donc, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a

$$\exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right) \leqslant \exp(0),$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} \leqslant 1.$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]}$$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (question 6) et majorée par 1 (question 7(a)). Donc, par le théorème de la convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite réelle $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (en passant à la limite dans l'inégalité de la question 7(a)).

(c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad g(u_n) = u_{n+1}$$

Or d'après la question 7(b), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ. Donc, en tant que suite extraite,

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell.$$

De plus, comme g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a aussi que

$$\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell).$$

Donc, par unicité de la limite,

$$g(\ell) = \ell.$$

Or, on a vu à la question 5(c), que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution donnée par $x = 1$. Donc, nécessairement,

$$\ell = 1,$$

c'est-à-dire $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1.}$

7. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 > 1$.

(a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n > 1$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } u_n > 1 \text{ ».}$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_0 > 1$$

D'après l'énoncé, $u_0 > 1$. Et donc, la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_n > 1$$

On veut montrer que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{n+1} > 1$$

D'après l'énoncé,

$$u_{n+1} = g(u_n)$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$u_n > 1.$$

Or d'après la question 2(e), la fonction g est strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$ et donc sur $]1, +\infty[$ car $\alpha < 1$ d'après la question 2(c). Donc

$$g(u_n) > g(1),$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} > 1.$$

Donc la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]}$$

(b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

D'après la question 6, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc, d'après le théorème de la limite monotone,
- soit la suite est majorée et elle converge vers un réel ℓ,
- soit la suite diverge vers $+\infty$.

Or si la suite convergeait vers un réel ℓ, alors en raisonnant comme à la question 7(c), on obtiendrait que $\ell = 1$. Or, la suite étant croissante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant u_0$$

et donc en passant à la limite

$$\ell \geqslant u_0 > 1$$

Ce qui est absurde. Donc finalement, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$