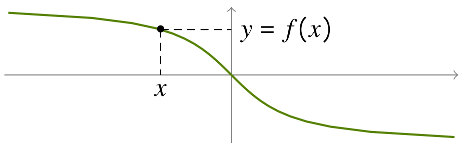
20. Notion d'Application

1 Application, antécédent, image

Définition 1.1 Soient E et F deux ensembles. Une **application** d'un ensemble E dans un ensemble F est un objet qui, à tout élément x de E associe un unique élément y de F que l'on note $f(x)$. On note alors

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$



- E est appelé l'**ensemble de définition** de f, i.e.

$$\forall x \in E, \quad f(x) \text{ existe}$$

- F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de f, i.e.

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in F$$

Si $y = f(x)$ avec $x \in E$, on dit que
- x est un **antécédent** de y
- et que y est l'**image** de x par f.

Une application correspond donc à la donnée de trois éléments : un ensemble de départ E, un ensemble d'arrivée F et une expression f.

- Le graphe $\mathcal{G}$ de f est l'ensemble défini par

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$$

- L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$. Si $E = F$, on note plus simplement $\mathcal{F}(E)$.

? Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. On considérera donc ces deux termes comme synonymes.

Exemple 1.2

Application	Ensemble de définition	Ensemble d'arrivée
$f: \begin{array}{ccc} [2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x-2} \end{array}$		
$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & k^2+3 \end{array}$		
$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & (\ln(x))^2 \end{array}$		
$j_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$		
$j_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$		
$j_3: \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$		

Exemple 1.3 Reprenons les fonctions de l'Exemple 1.2.

	Antécédent	Image
$f(2) = 0$		
$g(2) = 7$		
$g(-2) = g(2) = 7$		

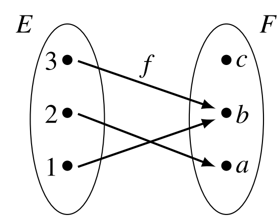
1.1 Comment représenter une application ?

On peut représenter une application de deux manières :

- Sous forme de diagrammes fléchés (lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont de cardinal fini)
- En représentant son graphe dans le plan muni $\mathbb{R}^2$ d'un repère.

Exemple 1.4 Soit $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ l'application f représentée ci-contre.

- L'ensemble de définition de f est ________
- L'ensemble d'arrivée de f est ________
- L'image de 2 par f est ________
- L'élément b admet ________ antécédents qui sont ________



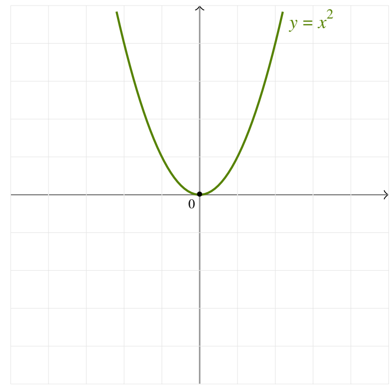
- L'application est-elle *surjective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au moins un antécédent ?

- L'application est-elle *injective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au plus un antécédent ?

- Quel est l'*image* de cette application, c'est-à-dire quel est l'ensemble des valeurs prises par l'application ?

Exemple 1.5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application suivante.

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$



- L'ensemble de définition de f est ________
- L'ensemble d'arrivée de f est ________
- L'image de 1 par f est ________
- L'élément 4 a _____ antécédents qui sont ________

- L'application est-elle *surjective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au moins un antécédent ?

- L'application est-elle *injective*, c'est-à-dire est-ce que tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent au plus un antécédent ?

- Quel est l'*image* de cette application, c'est-à-dire quel est l'ensemble des valeurs prises par l'application ?

1.2 Comment montrer que deux applications sont égales ?

Proposition 1.6 Deux applications f et g sont égales si
- elles ont le même ensemble de départ E,
- elles ont le même ensemble d'arrivée F,
- et elles ont la même expression :

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = g(x)$$

Ainsi, les fonctions

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} g : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

ne sont pas les mêmes, alors qu'elles ont la même expression. Par exemple, on a le droit de considérer l'objet mathématique $f(2)$ alors qu'on a pas le droit de considérer $g(2)$ (bien qu'on pourrait très facilement lui donner un sens...).

Exemple 1.7 Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^{x}) \quad \text{et} \quad g(x) = x + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})$$

Montrons que les deux applications sont égales.

1.3 Comment déterminer l'image d'un élément ?

? Pour déterminer l'image d'un élément $x \in E$ par l'application f, il faut calculer $f(x)$.

Exemple 1.8 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Calculer l'image de l'élément 4 par l'application f.

Exemple 1.9 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, 3x-2y) \end{array}$$

Calculer l'image de l'élément $(1,3)$ par l'application f.

1.4 Comment déterminer l'ensemble des antécédents d'un élément ?

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.

Pour déterminer les antécédents d'un élément $y \in F$ par l'application f, il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x. L'ensemble des solutions de cette équation correspond à l'ensemble des antécédents de y par f.

Exemple 1.10 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Calculer l'antécédent de 36 par f.

Exemple 1.11 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - y, 3x - 2y) \end{array}$$

Déterminer l'ensemble des antécédents de l'élément $(0, 1)$ par l'application f.

1.5 Quelques fonctions particulières

Définition 1.12 Soient E et F deux ensembles. Soient $a \in E$ et A une partie de E.

Nom	Définition
Application identité	$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$
Fonction indicatrice de A	$\begin{array}{rccc} 1_A : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$

Exemple 1.13 Donner les valeurs suivantes.

a) $1_{\mathbb{N}}(-1) =$ ________ b) $1_{\mathbb{Z}}(-1) =$ ________ c) $1_{i\mathbb{R}}(i) =$ ________

2 Opérations sur les applications

2.1 Restrictions et prolongements

Définition 2.1 Soit A une partie de E. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On définit la **restriction** de f à A, notée $f_{|A}$, par

$$\begin{array}{rccc} f_{|A} : & A & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

? On peut vouloir restreindre une application, par exemple pour récupérer des propriétés qualitatives intéressantes qui sont fausses sur l'ensemble de départ.

Exemple 2.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. La fonction f est-elle strictement monotone sur son ensemble de définition ?
2. Donner des restrictions de cette fonction qui sont strictement monotones.

Définition 2.3 Soit A une partie de E. Soit $f : A \longrightarrow F$ une application. On dit qu'une application $g : E \to F$ est un **prolongement** de f à E si

$$\forall x \in A, \qquad g(x) = f(x)$$

La notion de prolongement permet d'étendre le domaine de définition d'une fonction. Il n'y a pas unicité de la manière de prolonger. On prolongera alors souvent d'une manière «qui nous arrange», par exemple, qui préserve certaines propriétés qualitatives.

Exemple 2.4 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(x) \end{array}$$

Comme

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \underline{\qquad\qquad}$$

on peut prolonger cette application sur $[0,+\infty[$ en fixant une valeur en 0. L'application suivante est une prolongement de f sur $[0,+\infty[$:

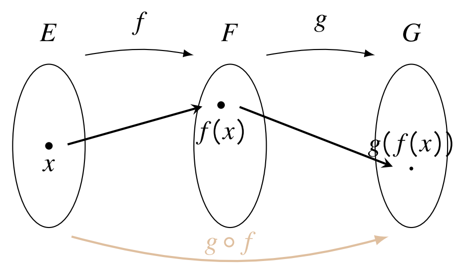
$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ \underline{\qquad\qquad} & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

L'intérêt de ce prolongement parmi les autres est que la fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est continue sur $[0,+\infty[$. On parle de **prolongement par continuité**.

2.2 Composition de deux applications

Définition 2.5 Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La composée $g \circ f$ est l'application définie par

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$



Avec les notations ci-dessus, $g \circ f$ est bien définie mais pas forcément $f \circ g$. De plus, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies, en générale, ces deux applications ne sont pas égales.

Proposition 2.6 Soient E, F et G quatre ensembles.Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Alors,

a) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ — L'opération $\circ$ est associative

b) $\mathrm{id}_F \circ f = f \circ \mathrm{id}_E = f$ — id est l'élément neutre pour $\circ$

Exemple 2.7 On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ si c'est possible.

Exemple 2.8 On considère les applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ si c'est possible.

Définition 2.9 Soient E un ensemble non vide et f une application de E dans E. On note $f^0 = \mathrm{id}_E$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

Exemple 2.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x + 1$$

Compléter les égalités suivantes.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^n(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad [f(x)]^n = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

3 Image directe et image réciproque

3.1 Image directe d'une application

Définition 3.1 Soit $f : E \to F$ une application. Soit A une partie de E. On appelle **image directe** de A par f, et on note $f(A)$ l'ensemble suivant

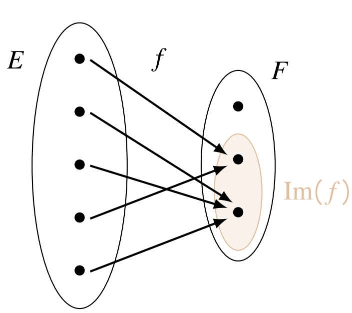
$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}.$$

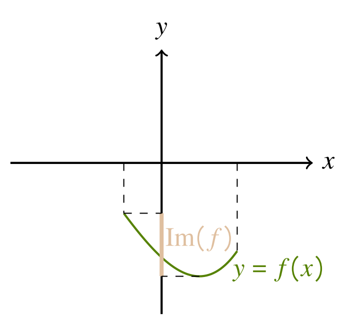
On a donc la caractérisation suivante :

$$y \in f(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in A,\ y = f(x).$$

C'est une partie de F, c'est-à-dire $f(A) \subset F$.

Définition 3.2 Soit $f : E \to F$ une application. L'ensemble $f(E) = \mathrm{im}(f)$ est appelé **image** de f.





? Pour déterminer $f(A)$, on peut s'appuyer sur un dessin ou essayer de compléter la phrase suivante : «lorsque x varie dans A, $f(x)$ varie dans...» Pour une fonction réelle, un tableau de variations peut également aider.

Exemple 3.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Calculer les images directes suivantes. *On pourra s'appuyer sur le graphe de la fonction.*

a) $f([0,1]) =$

b) $f(]-2,-1]) =$

c) $f([-1,2]) =$

d) $\text{im}(f) =$

Exemple 3.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. Calculer les images directes suivantes. *On pourra s'appuyer sur le graphe de la fonction.*

a) $f(\{0\}) =$

b) $f([0, \frac{\pi}{2}]) =$

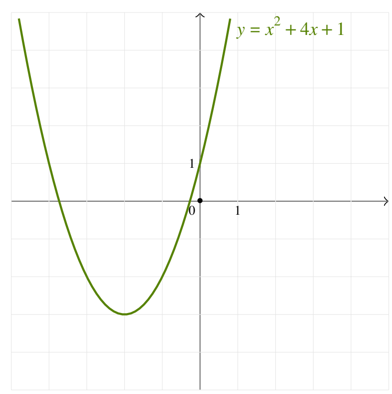
c) $f(\{0, \frac{3\pi}{4}, 2\pi\}) =$

d) $\text{im}(f) =$

Exemple 3.5

Déterminer l'image de l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 4x + 1 \end{array}$$



Définition 3.6 Soient $f : E \to F$ une application et B un sous-ensemble de F. On dit que f est **à valeurs dans** B si l'image de f est incluse dans B, c'est-à-dire $\mathrm{im}(f) \subset B$, ou encore

$$\forall x \in E, \qquad f(x) \in B$$

Exemple 3.7 Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

a) La fonction sinus est à valeurs dans $[-2,2]$.

b) L'image de la fonction sinus est $[-2,2]$.

c) La fonction carrée est à valeurs $[0,+\infty[$.

d) L'image de la fonction carrée est $[0,+\infty[$.

e) L'image de la fonction cube est $\mathbb{R}$.

3.2 Image réciproque

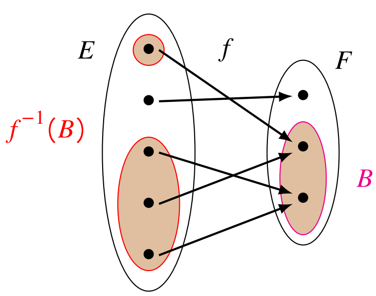
Définition 3.8 Soit $f : E \to F$ une application. Soit B une partie de F. On appelle **image réciproque** de B par f, notée $f^{-1}(B)$ l'ensemble suivant

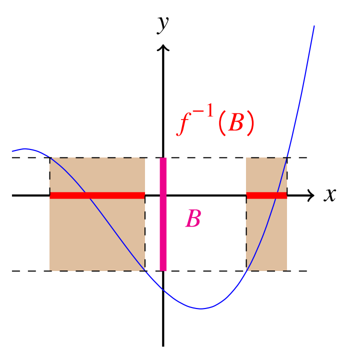
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

On a donc la caractérisation suivante :

$$x \in f^{-1}(B) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) \in B$$

C'est une partie de E, c'est-à-dire $f^{-1}(B) \subset E$.





Soient $f : E \to F$ une application et B une partie de F. Si f est bijective, l'ensemble $f^{-1}(B)$ est à la fois l'image réciproque de B par f, et aussi l'image directe de B par f^{-1} : les notions et notations coincident parfaitement. Cependant, même si la notation f^{-1} n'est valable que lorsque f est bijective, la notation $f^{-1}(B)$ elle, a un sens même lorsque la fonction f n'est pas bijective.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

a) Si $y \in \mathbb{R}$, on a la caractérisation suivante

$$x \in f^{-1}(\{y\}) \Longleftrightarrow f(x) = y$$

Ainsi, déterminer $f^{-1}(\{y\})$ revient à résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

b) Si $a, b \in \mathbb{R}$, on a la caractérisation suivante

$$x \in f^{-1}([a,b]) \Longleftrightarrow a \leq f(x) \leq b$$

Ainsi, déterminer $f^{-1}([a,b])$ revient à résoudre l'inéquation $a \leq f(x) \leq b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.9 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x^2$. Déterminer les images réciproques suivantes.

a) $f^{-1}(\{0\}) =$

b) $f^{-1}(\{4\}) =$

c) $f^{-1}(\{2,9\} =$

d) $f^{-1}([0,4]) =$

e) $f^{-1}([-2,4]) =$

f) $f^{-1}([-2,-1]) =$

g) $f^{-1}([9,+\infty[) =$

Exemple 3.10 Soit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$; $n \longmapsto n+1$. Déterminer les images réciproques suivantes.

a) $g^{-1}(\{4\}) =$

b) $g^{-1}(\{0\}) =$

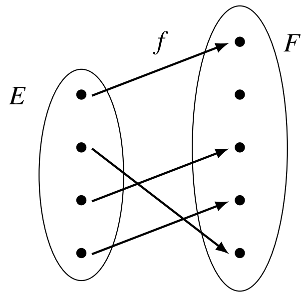
c) $g^{-1}(\{1,5\}) =$

Exemple 3.11 Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $(x,y) \longmapsto (x^2, x+y)$. Déterminer $h^{-1}(\{(4,1)\})$.

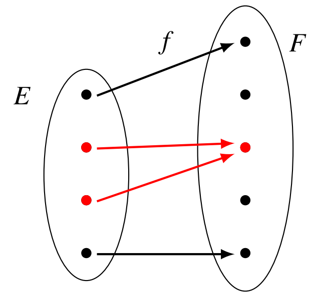
4 Injectivité, surjectivité et bijectivité

4.1 Injectivité

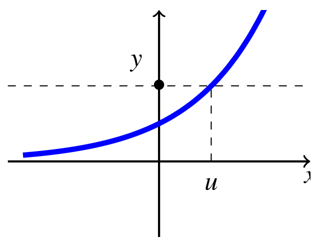
Définition 4.1 On dit qu'une application $f : E \to F$ est **injective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent dans E par f



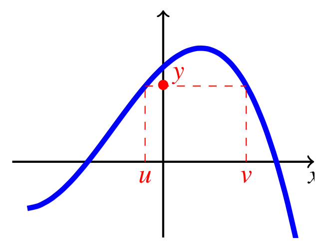
Injective



Non injective



Injective



Non injective

Proposition 4.2 Soit $f : E \to F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. L'application $f : E \to F$ est injective.
2. Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x) admet au plus une solution dans E.
3. **Pour tout $(x, y) \in E^2$, si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$.**
4. Pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$, c'est-à-dire deux éléments distincts n'ont pas la même image par f.

Proposition 4.3 Soit $f : E \to F$ une application. L'application $f : E \to F$ n'est pas injective s'il existe deux éléments distincts de E, x et y tels que $f(x) = f(y)$.

? Pour démontrer que $f : E \to F$ est **injective**, voici la rédaction habituelle.

> *Soient x et y des éléments de E quelconques.*
> *Supposons que $f(x) = f(y)$.*
> *Montrons que $x = y$.*
>
> **Insérer raisonnement mathématique**
>
> *Donc $x = y$. Ainsi, l'application $f : E \to F$ est injective.*

Exemple 4.4 On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & (x, x^2) \end{array}$$

Montrons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est injective.

Exemple 4.5 On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-3y, x+2y) \end{array}$$

Montrons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est injective.

Pour démontrer que $f : E \to F$ n'est **pas injective**, voici la rédaction habituelle.

> *Soient $x =$ *donner valeur* et $y =$ *donner valeur*.*
> *D'une part, $x \neq y$.*
> *D'autre part, $f(x) = f(y)$ car *insérer raisonnement mathématique*.*
> *Donc l'application $f : E \to F$ n'est pas injective.*

Exemple 4.6 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Montrons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ n'est pas injective.

Exemple 4.7 On considère l'application

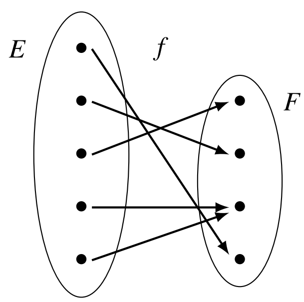
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Montrons que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est injective.

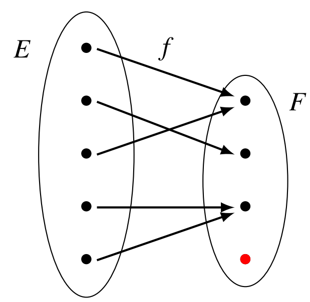
Proposition 4.8 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

4.2 Surjectivité

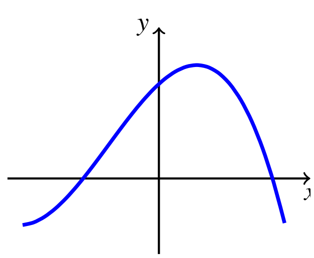
Définition 4.9 On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est **surjective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent dans E par f.



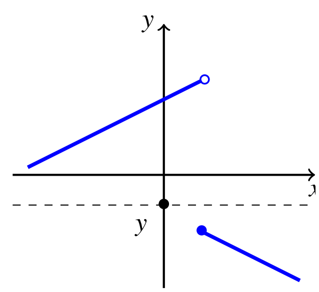
Surjective



Non surjective



Surjective



Non surjective

Proposition 4.10 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'application $f : E \to F$ est surjective.
2. Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution.
3. **3.** $\boxed{\text{Pour tout élément } y \text{ de } F\text{, il existe un élément } x \text{ de } E \text{ tel que } y = f(x).}$
4. $\boxed{\mathrm{Im}(f) = F}$

Proposition 4.11 Soit $f : E \to F$ une application. L'application $f : E \to F$ n'est pas surjective s'il existe un élément $y \in F$ qui n'a pas d'antécédent par f.

? Pour démontrer que $f : E \to F$ est **surjective**, voici la rédaction habituelle.

> *Soit y un élément de F quelconque.*
> *Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.*
>
> **Insérer raisonnement mathématique**
>
> *Donc $y = f(x)$ avec $x \in E$. Ainsi, l'application $f : E \to F$ est surjective.*

Exemple 4.12 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

Montrons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est surjective.

Exemple 4.13 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x - z) \end{array}$$

Montrons que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est surjective.

? Pour démontrer que $f : E \to F$ n'est **pas surjective**, voici la rédaction habituelle.

*Soit y =*donner valeur*.*
Montrons que y n'admet pas d'antécédent par f, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x n'admet pas de solution.

Insérer raisonnement mathématique

Donc l'application $f : E \to F$ n'est pas surjective.

Exemple 4.14 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Montrons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

Exemple 4.15 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

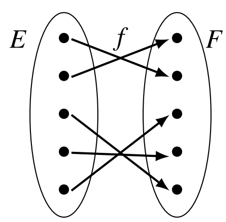
Montrons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est surjective.

Proposition 4.16 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

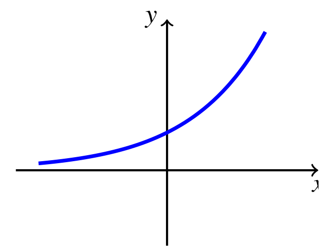
Démonstration. Soit z un élément quelconque de G.
Montrons qu' il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Comme l'application g est surjective, on sait qu'il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Puis, par surjective de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. ainsi, $z = g(y) = g(f(x))$. Donc l'application $g \circ f$ est surjective. ∎

4.3 Bijectivité

Définition 4.17 Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est **bijective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet un unique antécédent dans E par f.



Bijective



Bijective

Proposition 4.18 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'application $f : E \to F$ est bijective.
2. Pour tout élément y de F, il existe un unique élément x de E tel que $y = f(x)$.
3. L'application $f : E \to F$ est injective et surjective.

Proposition 4.19 Soit $f : E \to F$ une application. L'application $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, c'est-à-dire,

$$\text{pour tout } x \in E,\ g(f(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } y \in F,\ f(g(y)) = y.$$

Dans ce cas, l'application g est unique. Elle est appelée **bijection réciproque** de f et est notée f^{-1}.

Exemple 4.20 La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\ln : R_+^* \to \mathbb{R}$ sont bijectives et sont des bijections réciproques l'une de l'autre car

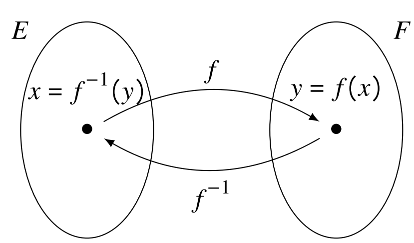
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp(\ln(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(y)) = y.$$

Proposition 4.21 Soit $f : E \to F$ bijective. Alors, la bijection réciproque est l'application qui, à un élément y de F, associe l'unique antécédent de y par f dans E, noté x,

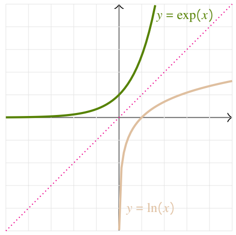
$$\begin{array}{rccl} f^{-1} : & F & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & x \text{ tel que } y = f(x) \end{array}$$

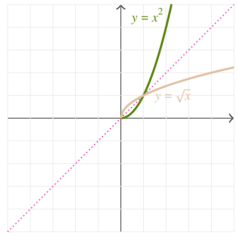
De plus, pour tout $x \in E$ et $y \in F$, on a

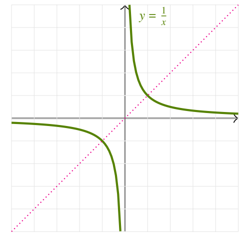
$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$



Proposition 4.22 Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ bijective. Alors les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.







Pour démontrer que $f : E \to F$ est **bijective**, on dispose de plusieurs méthodes.

1. On donne directement l'expression d'une fonction g telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

   Soit $x \in E$. Montrons que $g(f(x)) = x$.

   Insérer raisonnement mathématique

   Soit $y \in F$. Montrons que $f(g(y)) = y$.

   Insérer raisonnement mathématique

   Donc, $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Donc f est bijective et $f^{-1} = g$.

2. On montre que, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue $x \in E$) admet une unique solution. Dans ce cas, f est bijective et on obtient aussi l'expression de f^{-1}. Dans ce cas, voici la rédaction habituelle.

   Soit y un élément de F quelconque.
   Montrons qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

   Insérer raisonnement mathématique

   Donc il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, l'application $f : E \to F$ est bijective et pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y) = x$ où x est l'unique solution de l'équation $y = f(x)$.

3. On montre que $f : E \to F$ est injective et surjective à l'aide des méthodes expliquées précédemment. Dans ce cas, f est bijective mais on n'obtient pas l'expression de f^{-1}.
4. Dans le cas d'une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$, on peut aussi appliquer le théorème de la bijection.

Exemple 4.23 — Avec la méthode 1. On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ k & \longmapsto & k+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n-1 \end{array}$$

Montrons que l'application f est bijective, de bijection réciproque donnée par g.

Exemple 4.24 — Avec la méthode 2. On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

Exemple 4.25 — Avec la méthode 3. On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrons que l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est bijective.

Proposition 4.26 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Alors

1. Alors $g \circ f : E \to G$ est une bijection.
2. Et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exemple 4.27 — Avec la Méthode 4. Démontrer que la fonction f est bijective de $]1, +\infty[$ vers un intervalle à déterminer.