TD 20 – Notion d'Application

Exercice 1 – Recherche d'antécédent. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Déterminer l'ensemble des antécédents de 4 puis de -1 par l'application
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3x+4}{x^2+1} \end{array}$$
2. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(1,2)$ par l'application
$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, x+2y-z) \end{array}$$

1 Composée de deux applications

Exercice 2 – On considère les deux applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x+1 \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2x+6 \end{array}$$

1. Justifier l'existence de $f\circ g$ et $g\circ f$ et donner leur expression.
2. A-t-on $f\circ g = g\circ f$? *Justifier la réponse.*
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.

Exercice 3 – On considère les deux applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+e^x) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$$

Justifier que les applications f et g sont bien définies. Démontrer que,
$$f - f\circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

2 Image directe et image réciproque

Exercice 4 – Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ x\longmapsto x^2+x-2$. On pose $A=[-3,-1]$ et $B=[-1,1]$. Déterminer les ensembles suivants. *On pourra commencer par tracer l'allure de la courbe de f.Pour plus de précisions, on donne $\frac{9}{4}=2.25$.*

a) $f(A)$
b) $f(B)$
c) $f(A\cap B)$
d) $f(A)\cap f(B)$
e) $f^{-1}(A)$
f) $f(f^{-1}(A))$

Exercice 5 – Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ x\longmapsto\cos(x)$. Déterminer les ensembles suivants.

a) $f(\mathbb{R})$
b) $f(]0,2\pi[)$
c) $f\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\right)$
d) $f^{-1}(\{1\})$
e) $f^{-1}\left(\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\right)$
f) $f^{-1}\left(f\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\right)\right)$.

Exercice 6 – Image d'une fonction. On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3x+4}{x^2+1} \end{array}$$

Déterminer $\mathrm{Im}(f)$. *On pourra tracer le tableau de variations de f.*

Exercice 7 – Un peu de complexe.... Soit l'application $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}\ ;\ z\longmapsto z^2+2z+1$.

1. Déterminer l'image de $1+i$.
2. Déterminer s'ils existent, les antécédents de $1-i$.
3. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\mathbb{U})$.

Exercice 8 – Soient A et B deux parties de E et $f:E\longrightarrow F$ une application de E dans F. Démontrer les propositions suivantes.

a) Si $A\subset B$ alors $f(A)\subset f(B)$
b) $f^2(E)\subset f(F)$
c) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$
d) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$
e) $f^{-1}(B\cup B')=f^{-1}(B)\cup f^{-1}(B')$
f) $f^{-1}(B\cap B')=f^{-1}(B)\cap f^{-1}(B')$

3 Injectivité/surjectivité/bijectivité

Exercice 9 – Injectivité/surjectivité/bijectivité selon les ensembles de départ/d'arrivée. On considère l'application

$$h: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$$

1. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}$ et $F=\mathbb{R}$, l'application $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est ni injective, ni surjective.
2. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}_+$ et $F=\mathbb{R}$, l'application $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ est injective, mais pas surjective.
3. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}_+$ et $F=[1,+\infty[$, l'application $h:\mathbb{R}_+\to[1,+\infty[$ est une bijection.

Exercice 10 – On considère les applications suivantes.

a) $f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$
b) $f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x,x+1) \end{array}$
c) $f_3: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y) \end{array}$

1. Montrer que f_1 est non injective mais est surjective.
2. Montrer que f_2 est injective mais est non surjective.
3. Montrer que f_3 est injective et surjective.

Exercice 11 – Visualisation. Tracer (avec la représentation «patatoïde»)

1. une application de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,3,4\}$ injective et non surjective,
2. une application de $\{1,2,3,4\}$ dans $\{1,2,3\}$ non injective et surjective,
3. une application de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,3\}$ injective et surjective.

Exercice 12 – Visualisation sur un graphe. Tracer l'allure du graphe des fonctions suivantes et dire sans justification supplémentaire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

a) $\mathrm{ch}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$,
b) $\tan:\mathscr{D}\longrightarrow\mathbb{R}$.
c) $\mathrm{sh}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$
d) $\arctan:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

avec $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice 13 – Un peu de dénombrement... (pourquoi pas). Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Combien y'a-t-il d'applications bijectives de $\{1,2,3,4\}$ vers $\{1,2,3,4\}$ qui envoie 1 sur 1. Les lister/les représenter.
2. Combien y'a-t-il d'applications injectives de $\{1,2\}$ vers $\{1,2,3\}$? Les lister/les représenter.
3. Combien y'a-t-il d'applications surjectives de $\{1,2,3\}$ vers $\{1,2\}$? Les lister/les représenter. *On pourra commencer par compter les applications non surjectives.*

Exercice 14 – Injectivité, surjectivité, bijectivité. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de chacun des applications f suivantes. *On pourra représenter les fonctions pour se faire une idée des propriétés à démontrer.*

a) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+2 \end{array}$ b) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+y \end{array}$

c) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ d) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x+1| \end{array}$

e) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$ f) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \{-1,1\} \\ n & \longmapsto & (-1)^n \end{array}$

Exercice 15 – Bijectivité avec plusieurs méthodes. *Les trois questions sont indépendantes.*

1. On considère les deux applications suivantes
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y,-x+3y) \end{array}$$
$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & \left(\frac{3a-2b}{5},\frac{a+b}{5}\right) \end{array}$$
Montrer que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est une bijection et que g est la réciproque de f. *(cf Méthode 1 du cours.)*
2. On considère la fonction
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y,x-y) \end{array}$$
Montrer que la fonction f est bijective et déterminer son application réciproque. *(cf Méthode 2 du cours.)*
3. On considère la fonction
$$f: \begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(2x+1)-1 \end{array}$$
Montrer que la fonction f est bijective et déterminer son application réciproque. *(cf la Méthode 2 du cours.)*

Exercice 16 – Soient $f:E\longrightarrow F$ et $g:F\longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g\circ f$ est injective alors f est injective.
2. Montrer que si $g\circ f$ est surjective alors g est surjective.
3. Montrer que si $g\circ f$ est bijective alors g est surjective et f est injective.

Exercice 17 – Oral PC CCINP 2019. Soit $f:E\to E$. On suppose que $f\circ f\circ f=f$. Montrer que
$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective}$$

Exercice 18 – Banque PT Écrit 2016. Justifier que l'application suivante est une bijection de $\Delta=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ sur $D=\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \mid Y^2<2X\}$ et donner sa bijection réciproque:
$$f:\Delta\longrightarrow\mathbb{R}^2\ ;\ (u,v)\longmapsto\left(\frac{u^2+v^2}{2},v\right)$$

Exercice 19 – Oral MP Mines-Télécom 2022. On pose
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$
où $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Pour quels $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f est-elle bijective ?

4 Étude d'applications

Exercice 20 – On considère les deux applications $f:\{1,\dots,6\}\to\{1,\dots,6\}$ et $g:\{1,\dots,6\}\to\{1,\dots,6\}$ définies par leur tableau de valeurs ci-dessous.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	4	2	1	6	5

x	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	1	2	3	4	6	5

1. Déterminer $f\circ g$ et $g\circ f$ (après avoir justifié que ces objets sont bien définis).
2. Déterminer les deux ensembles suivants

   a) $f(\{1,5\})$ b) $g(\{5,6\})$
3. Justifier que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 21 – On considère l'application
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x-y,2y-6x) \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(0,0)$.
2. Montrer, par double inclusion, que l'ensemble image de f est $\mathrm{Im}(f)=\{(a,-2a)|\ a\in\mathbb{R}\}$.
3. L'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est-elle injective/surjective/bijective ?

Exercice 22 – On considère l'application
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ x & \longmapsto & \frac{1-x}{1+x} \end{array}$$

1. Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $f(x)\neq-1$.
2. Déterminer l'application $f\circ f$.
3. En déduire que $f:\mathbb{R}\backslash\{-1\}\to\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ est une bijection et on précisera sa bijection réciproque.

Exercice 23 – On considère la fonction $f:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto x+\dfrac{1}{x}$.

1. Représenter l'allure de sa courbe dans un repère orthonormé.
2. L'application f est-elle injective? surjective?
3. Déterminer graphiquement $f(\mathbb{R}^*)$, $f(]0,+\infty[)$, $f([1,+\infty[)$, $f(]0,1[)$, $f(]0,2[)$.
4. Déterminer graphiquement $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([-1,1])$, $f^{-1}([2,5/2])$.
5. Justifier que f réalise une bijection de $]0,1]$ sur un ensemble B à déterminer.