TD 20 – Notion d'Application (Correction)

Exercice 1 – Recherche d'antécédent. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Déterminer l'ensemble des antécédents de 4 puis de -1 par l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3x+4}{x^2+1} \end{array}$$

2. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(1,2)$ par l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, x+2y-z) \end{array}$$

Cf Correction manuscrite ci-dessous.

1. •• On résout l'équation $f(x)=4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = 4 &\iff \frac{3x+4}{x^2+1} = 4 \\ &\iff 3x+4 = 4(x^2+1) \\ &\iff 4x^2 - 3x = 0 \\ &\iff x(4x-3) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 4x-3 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des antécédents de 4 par f est donné par

$$\left\{ 0, \frac{3}{4} \right\}$$

Vérification : $f(0) = \frac{4}{1} = 4$ ✓

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3 \times \frac{3}{4} + 4}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{9+16}{4}}{\frac{9+16}{16}} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{25}{16}} = \frac{25}{4} \times \frac{16}{25} = 4 \ ✓$$

•• On résout l'équation $f(x) = -1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = -1 &\iff \frac{3x+4}{x^2+1} = -1 \\ &\iff 3x+4 = -(x^2+1) \\ &\iff x^2 + 3x + 5 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = (3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$

Donc l'équation $x^2+3x+5=0$ n'admet de solution.

Donc -1 n'admet pas d'antécédent par f.

2. On résout l'équation $g(x,y,z) = (1,2)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} g(x,y,z) = (1,2) &\iff (2x+y+z, x+2y-z) = (1,2) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y+z = 1 \\ x+2y-z = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+2y-z = 2 \\ 2x+y+z = 1 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\iff \begin{cases} x+2y-z = 2 \\ -3y+3z = -3 \end{cases} \quad \text{deux équations pour trois inconnues : on exprime } x \text{ et } y \text{ en fct de } z \text{ (par ex)} \\ &\iff \begin{cases} x+2y-z = 2 \\ y = z+1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = z+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des antécédents de $(1,2)$ par g est donné par

$$\{ (-z, z+1, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

1 Composée de deux applications

Exercice 2 – On considère les deux applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2x+6 \end{array}$$

1. Justifier l'existence de $f \circ g$ et $g \circ f$ et donner leur expression.
2. A-t-on $f \circ g = g \circ f$? *Justifier la réponse.*
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.

Cf Correction manuscrite ci-dessous.

1. On a :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Donc $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(3x+1) \\ &= -2(3x+1)+6 \\ &= -6x+4 \end{aligned}$$

On a :

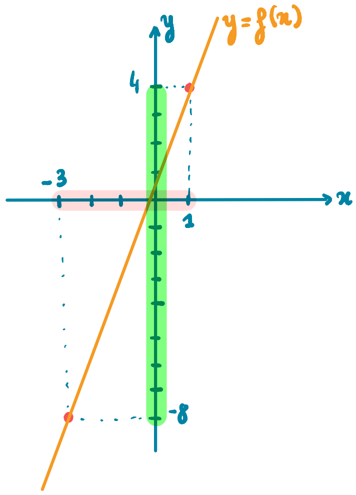
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

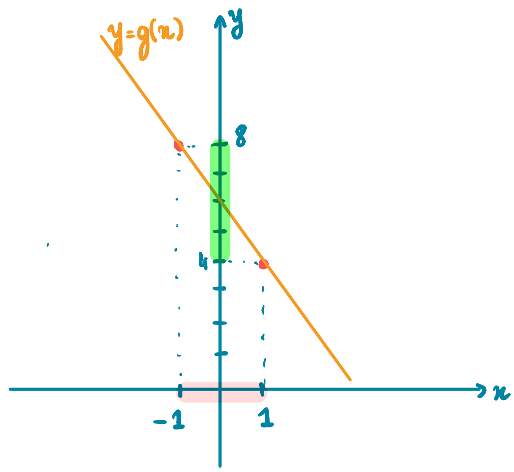
Donc $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(-2x+6) \\ &= 3(-2x+6)+1 \\ &= -6x+19 \end{aligned}$$

2. On a $f \circ g \neq g \circ f$ car par exemple, $(f \circ g)(0) = 19$ alors que $(g \circ f)(0) = 4$.

3.





Exercice 3 – On considère les deux applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+\mathrm{e}^x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$$

Justifier que les applications f et g sont bien définies. Démontrer que,

$$f - f\circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

Cf Correction manuscrite ci-dessous.

- Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on a $1+e^x \geq 1 > 0$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
  De plus, g est une fonction affine donc est bien définie sur $\mathbb{R}$.

- On a

$$\underbrace{\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}}_{f\circ g}$$

Donc $f\circ g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

But : Montrons que $f - f\circ g = id_{\mathbb{R}}$, c-à-d que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) - (f\circ g)(x) = x.$$

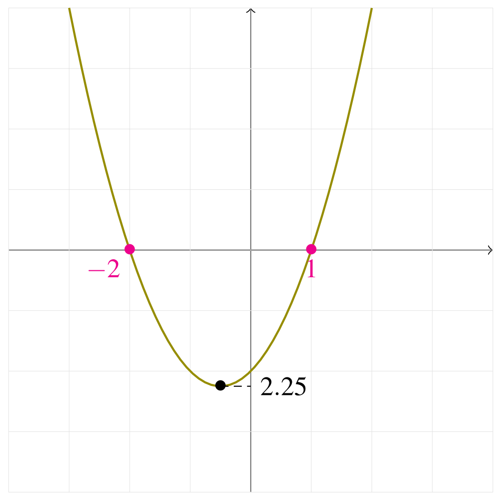
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) - (f\circ g)(x) &= \ln(1+e^x) - f(-x) \\ &= \ln(1+e^x) - \ln(1+e^{-x}) \\ &= \ln(e^x(e^{-x}+1)) - \ln(1+e^{-x}) \\ &= \ln(e^x) + \cancel{\ln(e^{-x}+1)} - \cancel{\ln(1+e^{-x})} \\ &= x. \end{aligned}$$

2 Image directe et image réciproque

Exercice 4 – Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,;\,x\longmapsto x^2+x-2$. On pose $A=[-3,-1]$ et $B=[-1,1]$. Déterminer les ensembles suivants. *On pourra commencer par déterminer le tableau de variations de f et tracer l'allure de la courbe de f. Pour plus de précisions, on donne $\frac{9}{4}=2.25$.*

x	0		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)=2x+1$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}=-2.25$	$\nearrow$	$+\infty$



a) $f(A)=[f(-1),f(-3)]=\boxed{[-2,4]}$

b) $f(B)=[-\frac{9}{4},f(1)]=\boxed{[-\frac{9}{4},0]}$

c) $f(A\cap B)=f(\{-1\})=\{f(-1)\}=\boxed{\{-2\}}$

d) $f(A)\cap f(B)=[-2,4]\cap[-\frac{9}{4},0]=\boxed{[-2,0]}$

e) $f^{-1}(A)=\{x\in\mathbb{R}|-3\leq f(x)\leq -1\}\ \boxed{\approx[-1.75,0.75]}$ $^{(*)}$

f) $f(f^{-1}(A))=\boxed{[-\frac{9}{4},-1]}$

$^{(*)}$ Soit $x\in\mathbb{R}$. On a,

$$\begin{array}{lcl} x\in f^{-1}(A) & \Leftrightarrow & f(x)\in A \\ & \Leftrightarrow & -3\leq f(x)\leq -1 \\ & \Leftrightarrow & -3\leq x^2+x-2 \text{ et } x^2+x-2\leq -1 \\ & \Leftrightarrow & 0\leq x^2+x+1 \text{ et } x^2+x-1\leq 0 \\ & \Leftrightarrow & x\in\mathbb{R} \text{ et } x\in[-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}] \text{en faisant le tableau de signes des poly} \end{array}$$

Donc,

$$\boxed{f^{-1}(A)=[-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}]}$$

Exercice 5 – Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto \cos(x)$. Déterminer les ensembles suivants.

a) $f(\mathbb{R}) = \{\cos(x) | x \in \mathbb{R}\} = \boxed{[-1,1]}$

b) $f(]0,2\pi[) = \boxed{[-1,1[}$ (tout le cercle trigo sauf le point d'abscisse 0)

c) $f\left(\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]\right)$

Tout d'abord, on peut remarquer que

$$f\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

car f est croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$. Donc,

$$\boxed{f\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\right) = \left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]}$$

d) $f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 1\} = \boxed{\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

e) $f^{-1}\left(\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]\right)$

Soit $x \in [0,2\pi]$. On a,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\right) \quad &\Leftrightarrow \quad -1 \leq \cos(x) \leq -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

Puis, par 2π-périodicite,

$$\boxed{f^{-1}\left(\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{4\pi}{3}+2k\pi\right]}$$

f) $f^{-1}\left(f\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\right)\right)$

Tout d'abord, on peut remarquer que

$$f^{-1}\left(f\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\right)\right)=f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right)=\{x\in\mathbb{R}\mid\frac{1}{2}\leq\cos(x)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

En raisonnant comme à la question précédente, on trouve que

$$\boxed{f^{-1}\left(f\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\right)\right)=\cup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3}+2k\pi,\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right]}$$

Exercice 6 – Image d'une fonction. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3x+4}{x^2+1} \end{array}$$

Déterminer $\mathrm{Im}(f)$. *On pourra tracer le tableau de variations de f.*

Cf Correction manuscrite ci-dessous.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3x+4}{x^2+1} \end{array}$

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 \neq 0$)

Et sa dérivée vaut :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{3(x^2+1) - (3x+4)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 - 8x + 3}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x^2-8x+3$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0

Résolution de $-3x^2-8x+3=0$

↳ $\Delta = 100 > 0$ donc 2 racines réelles

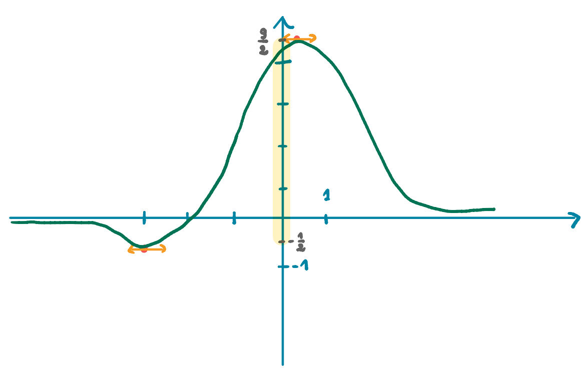
↳ $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = -3$

Limite en $+\infty$

$\forall x \neq 0, \; f(x) = \frac{x(3+\frac{4}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{x} \times \frac{3+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$

Donc $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0$

On en déduit l'allure de la courbe :



Donc

$$\mathrm{Im} f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right]$$

Exercice 7 – Un peu de complexe.... Soit l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$; $z \longmapsto z^2 + 2z + 1$.

1. Déterminer l'image de $1+i$.

   L'image de $1+i$ est

   $$f(1+i) = 1 + 2i - 1 + 2(1+i) + 1 = 4i + 3$$

2. Déterminer s'ils existent, les antécédents de $1-i$.

   Soit $z \in \mathbb{C}$. On peut commencer par remarquer que

   $$f(z) = 1 - i \Leftrightarrow z^2 + 2z + 1 = 1 - i \Leftrightarrow z^2 + 2z + i = 0$$

   On est face à une équation de second degré. Le discriminant de cette équation est égal à

   $$\Delta = 4 - 4i = 4\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

   Ainsi, l'équation admet deux solutions complexes sous la forme :

   $$\frac{-2 \pm \sqrt{4\sqrt{2}}e^{-i\pi/8}}{2} = -1 \pm 2^{1/4}e^{-i\pi/8}$$

   c'est-à-dire $1-i$ admet $\boxed{\text{deux antécédents}}$ qui sont

   $$\boxed{1 \pm 2^{1/4}e^{-i\pi/8}}$$

3. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\mathbb{U})$.

   - On peut commencer par remarquer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z+1)^2$. Donc, on peut montrer que

     $$\boxed{f(\mathbb{R}) = \{(z+1)^2 \mid z \in \mathbb{C}\} = [0, +\infty[}$$

   - Soit $z \in \mathbb{C}$. On a,

     $$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow z^2 + 2z + 1 \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow z^2 + 2z + 1 = \overline{z^2 + 2z + 1} \\ &\Leftrightarrow z^2 + 2z + 1 = \bar{z}^2 + 2\bar{z} + 1 \\ &\Leftrightarrow z^2 + 2z = \bar{z}^2 + 2\bar{z} \\ &\Leftrightarrow z^2 + 2z - \bar{z}^2 - 2\bar{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z} + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ ou } z + \bar{z} + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } 2\,\mathrm{Re}(z) + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathrm{Re}(z) = -1 \end{aligned}$$

     Ainsi,

     $$\boxed{f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = -1\}}$$

   - On a,

     $$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbb{U}) &= \{z \in \mathbb{C}; |f(z)| = 1\} \\ &= \left\{z \in \mathbb{C}; \left|(z+1)^2\right| = 1\right\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}; |(z+1)| = 1\} \end{aligned}$$

     Cela correspond donc au $\boxed{\text{cercle de centre d'affixe } -1 \text{ et de rayon } 1.}$

Exercice 8 – Soient A et B deux parties de E et $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans F. Démontrer les propositions suivantes.

a) Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$

Supposons que $A \subset B$. Montrons que $f(A) \subset f(B)$.
Soit $y \in f(A)$. Montrons que $y \in f(B)$.
Comme $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
Or, $x \in A$ et $A \subset B$, donc $x \in B$. Ainsi, $y = f(x) \in f(B)$. D'où $\boxed{f(A) \subset f(B).}$

b) $f^2(E) \subset f(F)$

Soit $y \in f^2(E)$. Montrons que $y \in f(F)$.
Comme $y \in f^2(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x) = f(f(x))$.
En posant $x' = f(x) \in F$ (car f va de E dans F), on a $y = f(x') \in f(F)$.
D'où $\boxed{f^2(E) \subset f(F).}$

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ par double inclusion.

- Montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
  Soit $y \in f(A \cup B)$. Montrons que $y \in f(A) \cup f(B)$.
  Comme $y \in f(A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
  Comme $x \in A \cup B$, soit $x \in A$ et alors $y = f(x) \in f(A)$ et donc $y \in f(A) \cup f(B)$.
  Soit $x \in B$ et alors $y = f(x) \in f(B)$ et donc $y \in f(A) \cup f(B)$.
  Dans les deux cas, $y \in f(A) \cup f(B)$
  Donc, $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
- Montrons que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
  Soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Montrons que $y \in f(A \cup B)$.
  Comme $y \in f(A) \cup f(B)$, soit $y \in f(A)$. Alors $\exists x \in A$, $y = f(x)$. A fortiori, $x \in A \cup B$ donc $y = f(x) \in f(A \cup B)$.
  Soit $y \in f(B)$. Alors $\exists x \in B$, $y = f(x)$. A fortiori, $x \in A \cup B$ donc $y = f(x) \in f(A \cup B)$.
  Dans les deux cas, $y \in f(A \cup B)$.
  D'où $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Comme $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ et $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$, on obtient,

$$\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)}$$

d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Soit $x \in f(A \cap B)$. Montrons que $x \in f(A) \cap f(B)$.
Comme $x \in f(A \cap B)$, il existe $y \in A \cap B$ tel que $x = f(y)$.
Comme $y \in A \cap B$, à fortiori $y \in A$. Donc, $x = f(y) \in f(A)$.
Comme $y \in A \cap B$, à fortiori $y \in B$. Donc, $x = f(y) \in f(B)$.
Donc $x \in f(A)$ et $x \in f(B)$, donc $x \in f(A) \cap f(B)$.
$\boxed{\text{Donc } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).}$

e) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

Soit $x \in E$. On a,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B \cup B') & \Leftrightarrow & f(x) \in B \cup B' \\ & \Leftrightarrow & f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B' \\ & \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(B) \text{ ou } x \in f^{-1}(B') \\ & \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')}$$

f) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Faire comme à la question précédente.

3 Injectivité/surjectivité/bijectivité

Exercice 9 – Injectivité/surjectivité/bijectivité selon les ensembles de départ/d'arrivée. On considère l'application

$$h: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$$

1. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}$ et $F=\mathbb{R}$, l'application $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est ni injective, ni surjective.
2. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}_+$ et $F=\mathbb{R}$, l'application $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ est injective, mais pas surjective.
3. Montrer que, lorsque $E=\mathbb{R}_+$ et $F=[1,+\infty[$, l'application $h:\mathbb{R}_+\to[1,+\infty[$ est une bijection.

Cf Correction manuscrite ci-dessous.
(page suivante)

Exercice 9

1. Soit $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+1 \end{array}$.

.. <u>Injectivité</u> ?

Soient $x=1$ et $y=-1$ deux éléments de $\mathbb{R}$.

D'une part, $x \neq y$.

D'autre part, $h(x)=3=h(y)$.

Donc $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective.

.. <u>Surjectivité</u> ?

L'équation $h(x)=x^2+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 1$).

Donc 0 n'admet pas d'antécédent par h.

Donc $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective

2. Soit $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+1 \end{array}$.

<u>Injectivité</u>:

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $h(x)=h(y)$.

Montrons que $x=y$.

Comme $h(x)=h(y)$, on a

$$x^2+1=y^2+1$$

c-à-d : $x^2=y^2$

c-à-d : $x=y$ ou $x=-y$

Comme x et y sont tous les deux positifs, nécessairement $x=y$.

Donc $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est injective.

.. <u>Surjectivité</u> ?

L'équation $h(x)=x^2+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 1$).

Donc 0 n'admet pas d'antécédent par h.

Donc $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective

3. Soit $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to [1;+\infty[\\ x \mapsto x^2+1 \end{array}$

Injectivité:

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $h(x)=h(y)$.
Montrons que $x=y$.
Comme $h(x)=h(y)$, on a

$$x^2+1=y^2+1$$

c-à-d : $x^2=y^2$

c-à-d : $x=y$ ou $x=-y$

Comme x et y sont tous les deux positifs, nécessairement $x=y$.
Donc $h : \mathbb{R}_+ \to [1;+\infty[$ est injective.

Surjectivité:

Soit $y \in [1;+\infty[$. On cherche $x \in \mathbb{R}_+$ tq $f(x)=y$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned} h(x)=y &\iff x^2+1=y \\ &\iff x^2=y-1 \\ &\iff x=\sqrt{y-1} \text{ ou } x=-\sqrt{y-1} \quad \text{car } y-1 \geq 0 \text{ car } y \geq 1 \\ &\iff x=\sqrt{y-1} \quad \text{car } x \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $y=h(x)$ avec $x=\sqrt{y-1} \in \mathbb{R}_+$
Donc $h : \mathbb{R}_+ \to [1;+\infty[$ est surjective.

Bijectivité:

$h : \mathbb{R}_+ \to [1;+\infty[$ est bijective car elle est injective et surjective.

Exercice 10 – On considère les applications suivantes.

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$

b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x,x+1) \end{array}$

c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y) \end{array}$

1. Montrer que f_1 est non injective mais est surjective.

   - On peut remarquer que $f((1,0)) = f((0,1))$ alors que $(1,0) \neq (0,1)$. Donc, f_1 n'est $\boxed{\text{pas injective}}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   - Montrons que f_1 est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{R}$. Alors il existe $(x,y) = (z,0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = z$. Donc, tout élément $z \in \mathbb{R}$ admet au moins un antécédent par f dans $\mathbb{R}^2$. Donc f_1 est $\boxed{\text{surjective}}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f_2 est injective mais est non surjective.

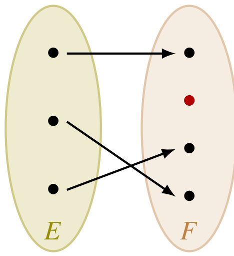
   - Montrons que f_2 est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Soient x et x' deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(x)$. Montrons que $x = x'$. Comme $f(x) = f(x')$, on sait que $(x,x+1) = (x',x'+1)$ et donc,
   $$\begin{cases} x = x' \\ x+1 = x'+1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = x'$$
   Donc, f_2 est $\boxed{\text{injective}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$
   - Montrons que $(0,0)$ n'admet pas d'antécédent par f. Supposons par l'absurde que $(0,0)$ admette un antécédent par f dans $\mathbb{R}$:
   $$\exists x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (0,0)$$
   On obtiendrait alors $x = 0$ et $x+1 = 0$ ce qui est absurde. Donc $(0,0)$ n'admet pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}$. Donc f_2 n'est $\boxed{\text{pas surjective}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que f_3 est injective et surjective.

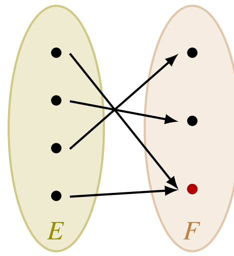
   - Montrons que f_3 est injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Soient (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = f(x',y')$. Montrons que $(x,y) = (x',y')$. Comme $f(x,y) = f(x',y')$, on sait que
   $$\begin{aligned} \begin{cases} x+y = x'+y' \\ x-y = x'+y' \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = x'+y' \\ 2x = 2x' \qquad L_2 \leftrightarrow L_2 + L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = x'+y' \\ x = x' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = y' \\ x = x' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) = (x',y') \end{aligned}$$
   Donc, f_3 est $\boxed{\text{injective}}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$
   - Montrons que f_3 est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors
   $$\exists (x,y) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right), f(x,y) = (a,b)$$
   Donc, f_3 est $\boxed{\text{surjective}}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 – Visualisation. Tracer (avec la représentation «patatoïde»)

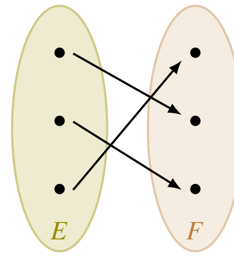
1. une application de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,3,4\}$ injective et non surjective,
2. une application de $\{1,2,3,4\}$ dans $\{1,2,3\}$ non injective et surjective,
3. une application de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,3\}$ injective et surjective.



Exemple d'une application *injective* et *non surjective*



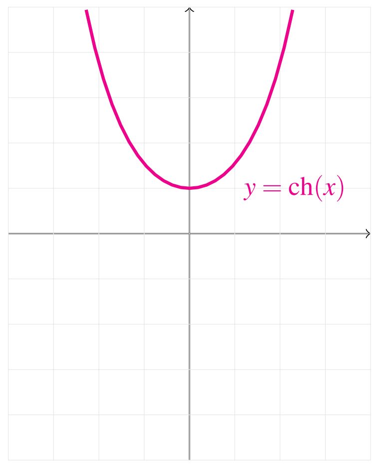
Exemple d'une application *non injective* et *surjective*



Exemple d'une application *injective* et *surjective*

Exercice 12 – Visualisation sur un graphe. Tracer l'allure du graphe des fonctions suivantes et dire sans justification supplémentaire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

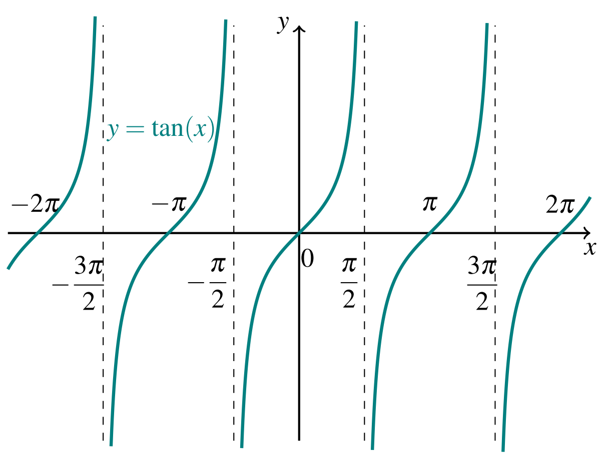
a) $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



- La fonction ch n'est $\boxed{\text{pas injective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$. (En effet, par parité $\mathrm{ch}(2) = \mathrm{ch}(-2)$ alors que $2 \neq -2$...)
- La fonction ch n'est $\boxed{\text{pas surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$. (Par exemple, $0 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent réel par la fonction ch car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1$.)
- À fortiori, la fonction ch n'est $\boxed{\text{pas bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$

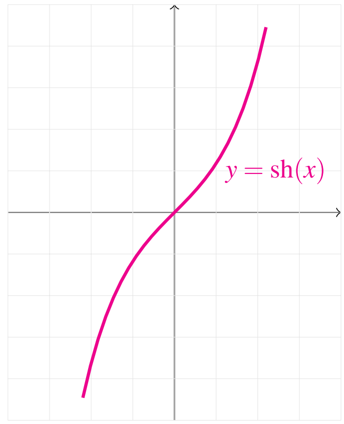
b) $\tan : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$

avec $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.



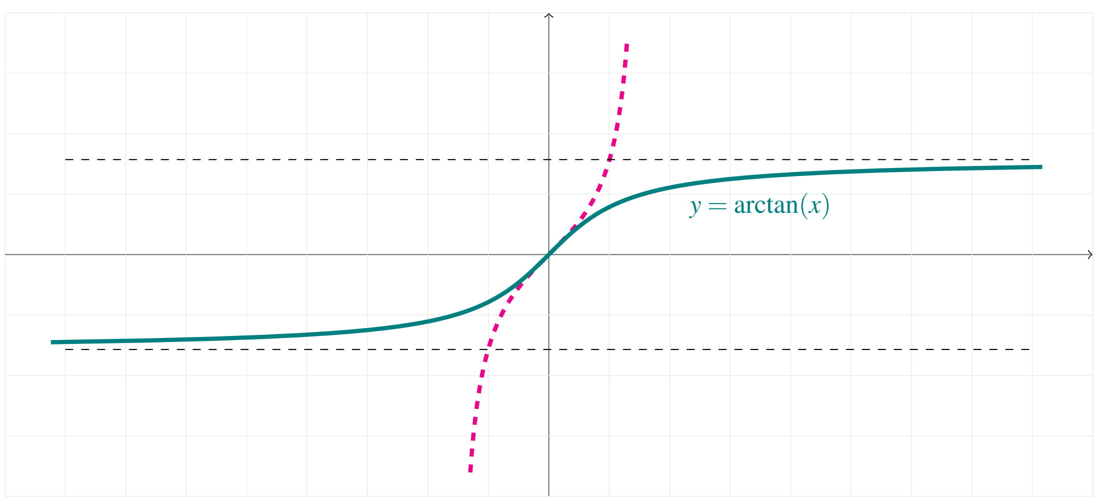
- La fonction tan n'est $\boxed{\text{pas injective de } \mathscr{D} \text{ dans } \mathbb{R}}$. (En effet, par 2π-périodicité du cosinus et sinus $\tan(0) = \tan(2\pi)$ alors que $0 \neq 2\pi$...)
- La fonction tan'est $\boxed{\text{surjective de } \mathscr{D} \text{ dans } \mathbb{R}}$.
- À fortiori, la fonction tan n'est $\boxed{\text{pas bijective de } \mathscr{D} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ (car non injective).}}$

c) $\text{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



- La fonction sh est $\boxed{\text{injective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$.
- La fonction sh est $\boxed{\text{surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$.
- Donc, la fonction sh est $\boxed{\text{bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$ (peut se montrer grâce au théorème de la bijection).

d) $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



- La fonction arctan est $\boxed{\text{injective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$.
- La fonction arctan n'est $\boxed{\text{pas surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$. Par exemple, $2 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent par la fonction arctan (car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) \leq 1$).
- Donc, la fonction sh n'est $\boxed{\text{pas bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$ (car non injective).

Exercice 13 – Un peu de dénombrement... (pourquoi pas). Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Combien y'a-t-il d'applications bijectives de $\{1,2,3,4\}$ vers $\{1,2,3,4\}$ qui envoie 1 sur 1. Les lister/les représenter.
2. Combien y'a-t-il d'applications injectives de $\{1,2\}$ vers $\{1,2,3\}$? Les lister/les représenter.
3. Combien y'a-t-il d'applications surjectives de $\{1,2,3\}$ vers $\{1,2\}$? Les lister/les représenter. *On pourra commencer par compter les applications non surjectives.*

Cf Correction manuscrite ci-dessous.

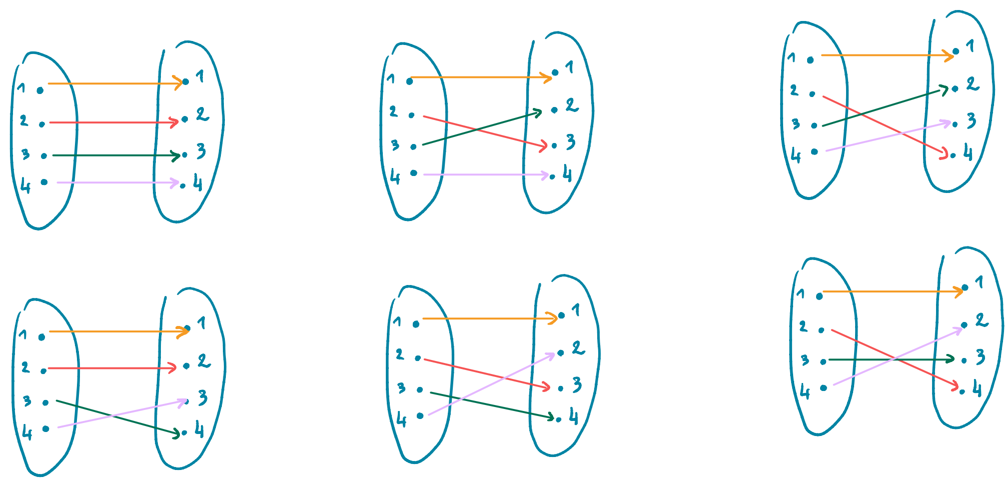
1. Nbre d'app bijectives de $\{1,2,3,4\}$ vers $\{1,2,3,4\}$ tq $1 \to 1$:

$$\underbrace{1}_{\text{choix de l'image de 1 imposé (vaut 1)}} \times \underbrace{3}_{\text{choix de l'image de 2}} \times 2 \times 1 = 6$$

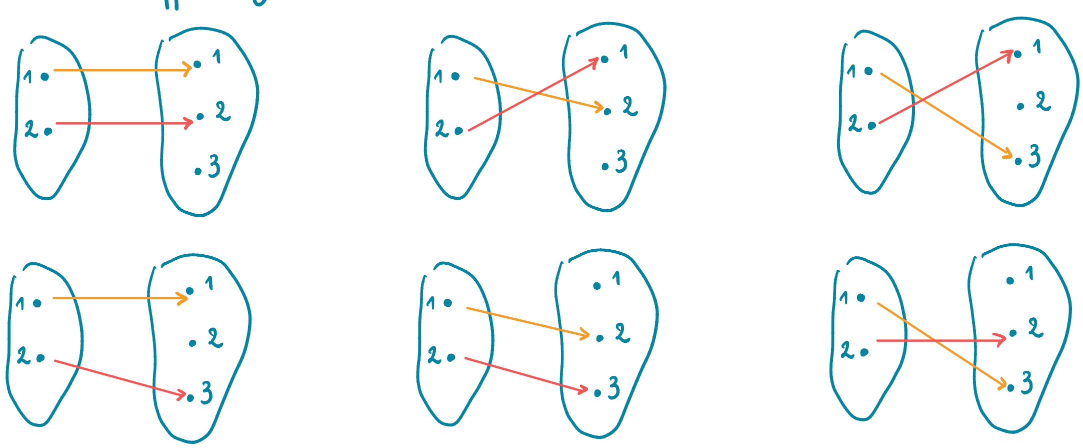
choix de l'image de 1 imposé (vaut 1)

choix de l'image de 2 (qui doit être $\neq$ de l'image de 1 donc vaut 2 ou 3 ou 4)

choix de l'image de 3 (qui doit être $\neq$ de l'image de 1 et de celle de 2)



2. Nbre d'app injectives de $\{1,2\}$ vers $\{1,2,3\}$: 6



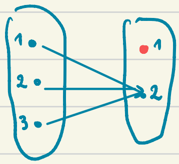
3. Nbre d'app de $\{1,2,3\}$ vers $\{1,2\}$:

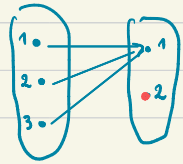
$$\underbrace{2}_{\text{choix de l'image de 1 (1 ou 2)}} \times \underbrace{2}_{\text{choix de l'image de 2 (1 ou 2)}} \times 2 = 8$$

choix de l'image de 3 (1 ou 2)

Nbre d'app non surjectives de $\{1,2,3\}$ vers $\{1,2\}$:

2





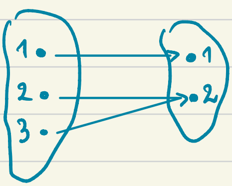
<u>soit</u> 1 n'a pas d'antécédent
alors 1, 2 et 3 sont envoyés sur 2

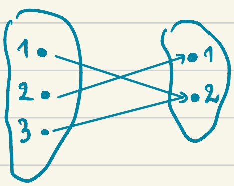
<u>soit</u> 2 n'a pas d'antécédent
alors 1, 2, 3 sont envoyés sur 1

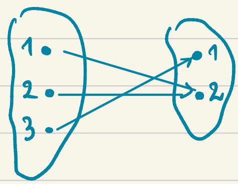
<u>soit</u> 1, 2 n'ont pas d'antécédent
alors impossible car 1, 2, 3 doivent être envoyés quelque part

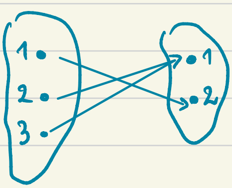
Nbre d'app surjectives de $\{1,2,3\}$ vers $\{1,2\}$:

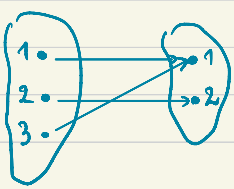
$8 - 2 = 6$

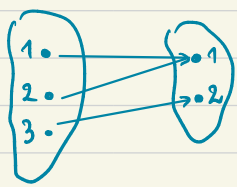












Exercice 14 – Injectivité, surjectivité, bijectivité. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de chacun des applications f suivantes. *On pourra représenter les fonctions pour se faire une idée des propriétés à démontrer.*

a) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+2 \end{array}$

b) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+y \end{array}$

c) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$

d) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x+1| \end{array}$

e) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$

f) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \{-1,1\} \\ n & \longmapsto & (-1)^n \end{array}$

Cf Correction manuscrite ci-dessous. (page suivante)

Exercice 14

1. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n+2 \end{array}$

Injectivité :

Soient n_1 et n_2 deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n_1) = f(n_2)$.
Montrons que $n_1 = n_2$.
Comme $f(n_1) = f(n_2)$, on a $n_1 + 2 = n_2 + 2$ et donc $n_1 = n_2$.
Donc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est injective.

Surjectivité :

L'équation $n+2 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$
Donc 0 n'admet pas d'antécédent par f.
Donc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ n'est pas surjective (et donc non bijective)

2. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto 2x+y \end{array}$.

Injectivité :

On a $f(0,1) = 1 = f(\frac{1}{2}, 0)$
alors que $(0,1) \neq (\frac{1}{2}, 0)$.
Donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'est pas injective. (et donc non bijective)

Surjectivité :

Soit $z \in \mathbb{R}$. On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = 2x + y = z$.
On peut prendre par ex, $(x,y) = (0,z) \in \mathbb{R}^2$.
Ainsi $z = f(0,z)$. Donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est surjective.

3. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$

Injectivité :

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $f(x) = f(y)$.
Montrons que $x = y$.
Comme $f(x) = f(y)$, on a $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ et donc $x = y$.
Donc $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est injective.

Surjectivité :

L'équation $\frac{1}{x} = 0$ (dans $\mathbb{R}_+^*$) n'a pas de solution (car $\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 = x \times 0 = 0$ pour $x \neq 0$).
Donc 0 n'admet pas d'antécédent par f.
Donc f n'est pas surjective (et donc non bijective)

4. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto |x+1| \end{array}$

Injectivité :

On a $f(0) = |1| = 1$

et $f(-2) = |-1| = 1$

Donc $f(0) = f(-2)$.

Mais $0 \neq -2$.

Donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ n'est pas injective (et donc non bijective).

Surjectivité :

Soit $y \in \mathbb{R}_+$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = |x+1| = y$.

On peut prendre par exemple $x = y-1 \in \mathbb{R}$ car

$f(y-1) = |y| = y$ car $y \geq 0$.

Donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est surjective.

5. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x^2+1} \end{array}$

Injectivité :

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tq $f(x) = f(y)$.

Montrons que $x = y$.

Comme $f(x) = f(y)$, on a :

$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1}$

et donc en élévant au carré,

$x^2+1 = y^2+1$

donc $x^2 = y^2$

donc $x = y$ ou $x = -y$.

Or, x et y sont tous les deux positifs

donc nécessairement, $x = y$.

Donc $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est injective.

Surjectivité :

Comme une racine carrée est toujours positive,

l'équation $\sqrt{x^2+1} = -1$ n'admet pas de solutions.

Donc 0 n'admet pas d'antécédent par f.

Donc $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective (et donc pas bijective).

6. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \{-1, 1\} \\ n \longmapsto (-1)^n \end{array}$

Injectivité :

On a $f(2) = 1 = f(4)$ alors que $2 \neq 4$.

Donc $f : \mathbb{N} \to \{-1, 1\}$ n'est pas injective (et donc pas bijective).

Surjectivité:

On a $1 = f(2)$
$-1 = f(1)$ (par ex.)

Donc tous les éléments de $\{1;-1\}$ admettent un antécédent par f.

Donc $f : \mathbb{N} \to \{-1,1\}$ est surjective

Exercice 15 – Bijectivité avec plusieurs méthodes. *Les trois questions sont indépendantes.*

1. On considère les deux applications suivantes

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, -x+3y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & \left(\frac{3a-2b}{5}, \frac{a+b}{5}\right) \end{array}$$

   Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une bijection et que g est la réciproque de f. *(cf Méthode 1 du cours.)*

2. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x-y) \end{array}$$

   Montrer que la fonction f est bijective et déterminer son application réciproque. *(cf Méthode 2 du cours.)*

3. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(2x+1)-1 \end{array}$$

   Montrer que la fonction f est bijective et déterminer son application réciproque. *(cf la Méthode 2 du cours.)*

Cf Correction manuscrite ci-dessous.
(page suivante)

Exercice 15

1. Pour montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective, on va mque

$$f\circ g = id_{\mathbb{R}^2} \quad \text{et} \quad g\circ f = id_{\mathbb{R}^2}.$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a

- $$\begin{aligned} f(g(x,y)) &= f\left(\frac{3x-2y}{5}, \frac{x+y}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3x-2y}{5} + 2\times\frac{x+y}{5}, -\frac{3x-2y}{5} + 3\times\frac{x+y}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3x-\cancel{2y}+2x+\cancel{2y}}{5}, \frac{-\cancel{3x}+2y+\cancel{3x}+3y}{5}\right) \\ &= \left(\frac{5x}{5}, \frac{5y}{5}\right) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} g(f(x,y)) &= g(x+2y, -x+3y) \\ &= \left(\frac{3(x+2y)-2(-x+3y)}{5}, \frac{(x+2y)+(-x+3y)}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3x+\cancel{6y}+2x-\cancel{6y}}{5}, \frac{\cancel{x}+2y-\cancel{x}+3y}{5}\right) \\ &= \left(\frac{5x}{5}, \frac{5y}{5}\right) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

Donc f est bijective et sa bijection réciproque est donné par g.

2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Montrons que l'équation $f(x,y)=(a,b)$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ admet une unique solution.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x,y)=(a,b) &\iff (2x-y, x-y) = (a,b) \\ &\iff \begin{cases} 2x-y = a \\ x-y = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x-y = b \\ 2x-y = a \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\iff \begin{cases} x-y = b \\ y = -2b+a \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\iff \begin{cases} x = a-b \\ y = a-2b \end{cases} \end{aligned}$$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $f(x,y) = (a,b)$ admet une unique solution donnée par

$$(x,y) = (a-b, a-2b)$$

Donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective et sa bijection réciproque est donné par :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longrightarrow & (a-b, a-2b) \end{array}$$

3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrons que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in]-\frac{1}{2};+\infty[$ admet une unique solution.

Soit $x \in]-\frac{1}{2};+\infty[$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \ln(2x+1) - 1 = y \\ &\iff \ln(2x+1) = y+1 \\ &\iff 2x+1 = \exp(y+1) \\ &\iff x = \frac{\exp(y+1)-1}{2} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in]-\frac{1}{2};+\infty[$ tel que $f(x) = y$, donné par

$$x = \frac{\exp(y+1)-1}{2}$$

Donc $f :]-\frac{1}{2};+\infty[\to \mathbb{R}$ est bijective et sa bijetion réciproque est donné par

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{1}{2};+\infty[\\ y & \longmapsto & \frac{\exp(y+1)-1}{2} \end{array}$$

Exercice 16 – Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

   On suppose que $g \circ f$ est injective de E dans G. Montrons que f est injective de E dans F.
   Soient x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$.
   Comme $f(x) = f(x')$, en composant par la fonction g, on obtient

   $$g(f(x)) = g(f(x')) \qquad \text{c-à-d} \qquad (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$$

   Or, on sait que $g \circ f$ est injective donc,

   $$x = x'$$

   Donc, $\boxed{f \text{ est injective de } E \text{ dans } F.}$

2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

   On suppose que $g \circ f$ est surjective de E dans G. Mque g est surjective de F dans G.
   Soit $z \in G$. Montrons qu'il existe $x \in F$ tel que $z = g(x)$.
   Comme $g \circ f$ est surjective de E dans G, on sait qu'il existe $y \in E$ tel que

   $$z = (g \circ f)(y) = g(f(y))$$

   En posant $x = f(y) \in F$, on obtient $z = g(x)$.
   Ainsi, $\boxed{g \text{ est surjective de } F \text{ dans } G.}$

3. Montrer que si $g \circ f$ est bijective alors g est surjective et f est injective.

   On suppose que $g \circ f$ est bijective de E dans G.

   - Alors, à fortiori, $g \circ f$ est surjective de E dans G, donc d'après la Question 2, $\boxed{g \text{ est surjective.}}$
   - Alors, à fortiori, $g \circ f$ est injective de E dans G, donc d'après la Question 1, $\boxed{f \text{ est injective.}}$

Exercice 17 – Oral PC CCINP 2019. Soit $f : E \to E$. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective}$$

Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f \quad (\star)$.

- $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est injective de E dans E. Montrons que f est surjective de E dans E. Soit $z \in E$. On cherche $x \in E$ tel que $z = f(x)$. En utilisant $(\star)$, on sait que

$$(f \circ f \circ f)(z) = f(z) \qquad \text{c-à-d} \qquad f(f(f(z))) = f(z)$$

  Or, la fonction f est injective, donc

$$f(f(z)) = z$$

  En posant $x = f(z)$, on obtient $z = f(x)$. D'où $\boxed{f \text{ surjective.}}$

- $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que f est surjective de E dans E. Montrons que f est injective de E dans E. Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. Comme f est surjective, il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$. De même, il existe $b \in E$ tel que $x' = f(b)$. On a alors

$$\begin{aligned} x &= f(a) \\ &= f(f(f(a))) \qquad \text{en utilisant } (\star). \\ &= f(f(x)) \qquad \text{car } f(a) = x \\ &= f(f(x')) \qquad \text{car } f(x) = f(x') \\ &= f(f(f(b))) \qquad \text{car } x' = f(b) \\ &= f(b) \qquad \text{en utilisant } (\star). \\ &= x' \qquad \text{car } x' = f(b) \end{aligned}$$

  D'où f $\boxed{\text{injective.}}$

Exercice 18 – Banque PT Écrit 2016. Justifier que l'application suivante est une bijection de $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sur $D = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid Y^2 < 2X\}$ et donner sa bijection réciproque:

$$f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ ; \ (u,v) \longmapsto \left(\frac{u^2+v^2}{2}, v\right)$$

- Commençons par montrer que pour tout $(u,v) \in \Delta$, $f(u,v) \in D$.
  Soit $(u,v) \in \Delta$. On a $f(u,v) = \left(\dfrac{u^2+v^2}{2}, v\right)$.
  Posons $X = \dfrac{u^2+v^2}{2}$ et $Y = v$. Montrons que $f(u,v) = (X,Y) \in D$.
  On a $2X = 2\dfrac{u^2+v^2}{2} = u^2+v^2 > v^2 = Y^2$. Donc $(X,Y) \in D$.
  L'application $f : \Delta \longrightarrow D$ est donc bien définie.
- Soit $(X,Y) \in D$. On a

$$f(u,v) = (X,Y) \iff \begin{cases} \dfrac{u^2+v^2}{2} = X \\ v = Y \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 = 2X - Y^2 \\ v = Y \end{cases}$$

  Comme $(X,Y) \in D$, $2X - Y^2 > 0$. Donc

$$f(u,v) = (X,Y) \iff \begin{cases} u = \sqrt{2X-Y^2} \in \mathbb{R}_+^* \\ v = Y \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} u = -\sqrt{2X-Y^2} \in \mathbb{R}_-^* \\ v = Y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

  Donc $(X,Y) \in D$ admet un unique antécédent par f dans $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, qui est $(\sqrt{2X-Y^2}, Y)$.

La fonction f est donc une $\boxed{\text{bijection}}$ de Δ dans D, de bijection réciproque

$$\boxed{f^{-1} : D \longrightarrow \Delta \ ; \ (X,Y) \longmapsto (\sqrt{2X-Y^2}, Y)}$$

Exercice 19 – Oral MP Mines-Télécom 2022. On pose

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

où $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est-elle bijective ?

4 Étude d'applications

Exercice 20 – On considère les deux applications $f : \{1,\dots,6\} \to \{1,\dots,6\}$ et $g : \{1,\dots,6\} \to \{1,\dots,6\}$ définies par leur tableau de valeurs ci-dessous.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	4	2	1	6	5

x	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	1	2	3	4	6	5

1. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ (après avoir justifié que ces objets sont bien définis).
2. Déterminer les deux ensembles suivants

   a) $f(\{1,5\})$ b) $g(\{5,6\})$

3. Justifier que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Cf Correction manuscrite ci-dessous.

1. On a :

$$\underbrace{[\![1,6]\!] \xrightarrow{f} [\![1,6]\!] \xrightarrow{g} [\![1,6]\!]}_{g\circ f}$$

Donc $g\circ f : [\![1,6]\!] \to [\![1,6]\!]$ bien défini.

x	1	2	3	4	5	6
$(g\circ f)(x)$	3	4	2	1	5	6

car $g(f(1)) = g(3) = 3$

$g(f(2)) = g(4) = 4$

...

On a :

$$\underbrace{[\![1,6]\!] \xrightarrow{g} [\![1,6]\!] \xrightarrow{f} [\![1,6]\!]}_{f\circ g}$$

Donc $f\circ g : [\![1,6]\!] \to [\![1,6]\!]$ bien défini.

x	1	2	3	4	5	6
$(f\circ g)(x)$	3	4	2	1	5	6

2. On a :

$f\langle\{1,5\}\rangle = \{f(1), f(5)\} = \{3,6\}$

$g\langle\{5,6\}\rangle = \{g(5), g(6)\} = \{6,5\}$

3. Considérons la fonction h donnée par :

x	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	4	3	1	2	6	5

Alors, on vérifie que

- pour tout $x \in [\![1,6]\!]$, $f(h(x)) = x$
- pour tout $x \in [\![1,6]\!]$, $h(f(x)) = x$

Donc f est bijective et sa bijection réciproque est donné par h.

Exercice 21 – On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x-y, 2y-6x) \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(0,0)$.
2. Montrer, par double inclusion, que l'ensemble image de f est $\mathrm{Im}(f) = \{(a,-2a) |\ a \in \mathbb{R}\}$.
3. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est-elle injective/surjective/bijective ?

Cf Correction manuscrite ci-dessous.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$f(x,y) = (0,0) \iff (3x-y, 2y-6x) = (0,0)$$
$$\iff \begin{cases} 3x-y=0 \\ -6x+2y=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x-y=0 \\ \cancel{0=0} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$
$$\iff y = 3x$$

L'ensemble des antécédents de $(0,0)$ est donné par :

$$\{(x,3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

2. Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \underbrace{\{(a,-2a) \mid a \in \mathbb{R}\}}_{:=F}$ par double inclusion.

▶ Mque $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$.

Soit $(a,b) \in \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $(a,b) \in F$.

Comme $(a,b) \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $(a,b) = (3x-y, 2y-6x)$.

Pour mque $(a,b) \in F$, il s'agit de mque $b = -2a$.

On a

$$-2a = -2(3x-y)$$
$$= -6x+2y$$
$$= b.$$

Donc $(a,b) \in F$. Donc $\mathrm{Im} f \subseteq F$.

▶ Mque $F \subseteq \mathrm{Im} f$.

Soit $(a,b) \in F$. Mque $(a,b) \in \mathrm{Im} f$.

Comme $(a,b) \in F$, on sait que $b = -2a$.

On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $(a,b) = f(x,y)$.

On peut prendre par ex

$$(x,y) = (0,-a)$$

car $f(0,-a) = (a,-2a) = (a,b)$ par hypothèse.

Donc $(a,b) \in \mathrm{Im} f$. Donc $F \subseteq \mathrm{Im} f$.

3. Injectivité :

D'après la question 1, $f(0,0) = f(1,3) = (0,0)$ (l'élément $(0,0)$ admet une infinité d'antécédent).

Mais $(0,0) \neq (1,3)$. Donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ n'est pas injective (et donc pas bijective).

Surjectivité :

D'après la question 2, $\mathrm{Im} f = \{(a,-2a) \mid a \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2$ (par ex $(1,0) \notin \mathrm{Im} f$ car $0 \neq -2\times 1$)

Donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ n'est pas surjective.

Exercice 22 – On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ x & \longmapsto & \frac{1-x}{1+x} \end{array}$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $f(x) \neq -1$.
2. Déterminer l'application $f \circ f$.
3. En déduire que $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ est une bijection et on précisera sa bijection réciproque.

Cf Correction manuscrite ci-dessous.

1. Cette question consiste à mque f est bien déf au sens où :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ f(x) \in \underbrace{\mathbb{R}\backslash\{-1\}}_{\text{bon ens. d'arrivée}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = -1 &\iff \frac{1-x}{1+x} = -1 \\ &\iff 1-x = -(1+x) \\ &\iff 1-\cancel{x} = -1-\cancel{x} \\ &\iff \underbrace{1 = -1}_{\text{impossible}} \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $f(x) \neq -1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On a

$$\begin{aligned} \underbrace{(f \circ f)}_{\text{bien déf}}(x) &= f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ &= \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{\frac{1+x-(1-x)}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} \\ &= \frac{2x}{1+x} \times \frac{1+x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

3. Comme $f \circ f = id_{\mathbb{R}\backslash\{-1\}}$, f est bijective et sa bijection réciproque est donné par elle-même.

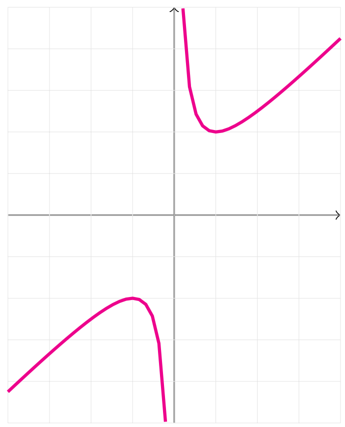
Exercice 23 – On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.

1. Représenter l'allure de sa courbe dans un repère orthonormé.

   Pour représenter l'allure de la fonction, on peut commencer par dresser son tableau de variations.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	-2	$\searrow$ $-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$ 2 $\nearrow$	$+\infty$

   On en déduit l'allure de la courbe.



2. L'application f est-elle injective? surjective?

   - Non injective car $f(1/2) = \frac{1}{2} + 2 = f(2)$ et $2 \neq \frac{1}{2}$.
   - Non surjective car 0 n'a pas d'antécédent.

3. Déterminer graphiquement $f(\mathbb{R}^*)$, $f(]0,+\infty[)$, $f([1,+\infty[)$, $f(]0,1[)$, $f(]0,2[)$.

   a) $f(\mathbb{R}^*) =]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$,
   b) $f(]0,+\infty[) = [2,+\infty[$,
   c) $f([1,+\infty[) = [2,+\infty[$,
   d) $f(]0,1[) =]2,+\infty[$,
   e) $f(]0,2[) = [2,+\infty[$.

4. Déterminer graphiquement $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([-1,1])$, $f^{-1}([2,5/2])$.

   a) $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$,
   b) $f^{-1}(]-\infty,2]) =]-\infty,0[\cup \{1\}$,
   c) $f^{-1}([-1,1]) = \emptyset$,
   d) $f^{-1}([2,5/2)) = [1/2,2]$

5. Justifier que f réalise une bijection de $]0,1]$ sur un ensemble B à déterminer.

   - $]0,1]$ est un intervalle
   - f est continue sur $]0,1]$
   - f est strictement décroissante sur $]0,1]$

   D'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $]0,1]$ sur $f(]0,1]) = [2,+\infty[$.