

21. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée

Définition 1.1 On appelle **polynôme à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$** toute expression P de la forme

$$P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_kX^k$$

où X est un symbole formel appelé **indéterminée**, les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$ appelés **coefficients** du polynôme P (le coefficient a_0 est souvent appelé **coefficient constant**). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple 1.2 Remplir le tableau suivant.

	Polynôme (V/F)	Coefficient constant	Ensemble
$P_1 = 1 - 2X^3 + 5X^4$			
$P_2 = 0$			
$P_3 = iX^2 - 1 + 2i$			
$P_5 = 3 + 2X - 51\sqrt{X}$			

Définition 1.3 — Polynômes particuliers.

- Le **polynôme nul** est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls, noté 0 ou $0_{\mathbb{K}[X]}$.
- On appelle **polynôme constant** tout polynôme de la forme $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$.

1.1 Identification des coefficients d'un polynôme

Définition 1.4 Soient $P = \sum_{k=0}^n a_kX^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_kX^k$ dans $\mathbb{K}[X]$. On dit que P et Q sont **égaux** si

$$n = m \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_k = b_k$$

Exemple 1.5 — Introduction à la décomposition en éléments simples. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1}$$

1.2 Opérations sur les polynômes

Définition 1.6 Soient $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$. On a les opérations suivantes :

Somme de P et Q	$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$
Multiple de P par λ	$\lambda P = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k) X^k$
Produit de P et Q	$PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = c_k = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j=k}} a_i b_j$
Puissance n -ième de P	$\begin{cases} P^0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, P^{n+1} = P^n P \end{cases}$, soit $P^n = \underbrace{P \times \dots \times P}_{n \text{ fois}}$
Composée de Q par P	$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$

Exemple 1.7 Soient P et Q deux polynômes définis par,

$$P = X^2 + X + 1 \quad \text{et} \quad Q = X^3 - X + 2.$$

Calculer PQ à l'aide la proposition.

Dans les faits, on utilise rarement ces formules abstraits sur les opérations des polynômes, mais on utilise les règles usuelles de calculs entres puissances déjà connues.

Proposition 1.8 Soient P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors

- $P + Q = Q + P$ et $PQ = QP$ | Commutativité de l'addition et de la multiplication
- $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ et $(PQ)R = P(QR)$ | Associativité de l'addition et de la multiplication
- $(P + Q)R = PR + QR$ et $P(Q + R) = PQ + PR$ | Distributivité de l'addition et de la multiplication
- $P + 0 = 0 + P = P$ et $1 \times P = P$ | 0 (resp. 1) élément neutre pour l'addition (resp. multiplication)
- $(-1)P$ est l'opposé du polynôme P , noté $-P$: $P + (-P) = (-P) + P = 0$.

Exemple 1.9 Soient P et Q deux polynômes définis par,

$$P = X^2 + X + 1 \quad \text{et} \quad Q = X^3 - X + 2.$$

Effectuer les opérations suivantes.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) $-5Q =$ | b) $(P + Q) =$ |
| c) $(PQ) =$ | d) $P(X + 1) =$ |
| e) $P(X^2) =$ | f) $P(-X) =$ |
| g) $(P \circ Q)(X) =$ | h) $(Q \circ P)(X) =$ |

Proposition 1.10 — Binôme de Newton. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(P + Q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

Proposition 1.12 — Factorisation. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$P^n - Q^n = (P - Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$$

Exemple 1.11 Développer les polynômes suivants. **Exemple 1.13** Factoriser les polynômes suivants.

- | | |
|------------------|------------------|
| a) $(X + 1)^3 =$ | a) $X^3 - 2^8 =$ |
| b) $(X + i)^3 =$ | b) $X^3 - 1 =$ |
| c) $(X - 1)^3 =$ | c) $X^3 + i =$ |

1.3 Degré d'un polynôme

Définition 1.14 Soit

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$$

un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ avec $a_n \neq 0$. L'entier n est appelé le **degré** du polynôme P . On note $\deg(P) = n$. Le coefficient a_n est le **coefficient dominant** de P . Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$.

Définition 1.15 Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n :

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$$

Ainsi, un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ est de la forme

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

avec les coefficients éventuellement nuls (y compris a_n).

Exemple 1.16 Compléter le tableau suivant.

$\mathbb{K}_n[X]$	Forme des polynômes	Exemples
$\mathbb{K}_0[X]$		
$\mathbb{K}_1[X]$		
$\mathbb{K}_2[X]$		

Exemple 1.17

Polynôme	Deg	Coeff. dom.	Ensemble
$P_1 = 54 - 2X + 4X^5 - 112X^9$			
$P_2 = X^2 - iX^4 + 3X^3$			
$P_3 = 6$			
$P_4 = 0$			

Exemple 1.18 Compléter les phrases suivantes.

- a) Le polynôme P est non nul si _____ b) Si $\deg(P) = 0$ alors le polynôme P est _____
- c) Si $n \leq m$, alors $\mathbb{R}_n[X] \subseteq \mathbb{R}_m[X]$ d) Si $n \leq m$, alors $\mathbb{R}_m[X] \subseteq \mathbb{R}_n[X]$

Définition 1.19 Un polynôme est dit **unitaire** si son coefficient dominant est égal à 1.

Exemple 1.20 Dire si les polynômes suivants sont unitaires ou non.

- a) $X^2 - 3$ b) $-X^2 + X + 2$

Proposition 1.21 Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors

- a) $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ (si $\lambda \in \mathbb{K}^*$) b) $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- c) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ d) $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \cdot \deg(Q)$ (si $\deg(Q) \geq 1$)



Pour la somme, de manière générale, on n'a pas l'égalité entre $\deg(P + Q)$ et $\max(\deg(P), \deg(Q))$ car les coefficients dominants peuvent s'annuler. Par exemple, pour

$$P = X^3 + X^2 + X + 1 \quad \text{et} \quad Q = -X^3$$

alors

$$\deg(P + Q) = ______ \quad \text{mais} \quad \max(\deg(P), \deg(Q)) = ______$$

L'égalité $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ est valable seulement lorsque les polynômes P et Q ne sont pas de même degré.

Exemple 1.22 Déterminer le degré des polynômes $P_1 = (X + a)^n$ et $P_2 = (X + 1)^n - X^n$.

Exemple 1.23 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tel qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $PQ = 1$.

Proposition 1.24 Soient $n \in \mathbb{N}$, P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
(Stabilité par combinaison linéaire)

Proposition 1.25 Soient P , Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors

- $PQ = 0 \iff P = 0$ ou $Q = 0$
- Si $R \neq 0$, alors $PR = QR \iff P = Q$.

1.4 Évaluation polynomiale et fonction polynomiale associée

Définition 1.26 Soient $a \in \mathbb{K}$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle **évaluation de P en α** le scalaire

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k$$

La **fonction polynomiale associée à P** est la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{P} : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k \end{aligned}$$

(Par abus de notation, on notera souvent la fonction polynomiale également P .)

! X n'est pas un nombre, donc on ne dit pas « Posons $X = \alpha$ » mais « Évaluons P en α ». On dit aussi que l'on substitue le nombre x à l'indéterminée X .

Exemple 1.27 Si $P = 1 - X^2$ alors

a) $P(1) =$

b) $P(2) =$

Si $P = -1$, alors

a) $P(1) =$

b) $P(2) =$

Proposition 1.28 Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $(\alpha, \lambda, \mu) \in \mathbb{K}^3$. Alors

- $(\lambda P + \mu Q)(\alpha) = \lambda \tilde{P}(\alpha) + \mu \tilde{Q}(\alpha)$
- $(PQ)(\alpha) = \tilde{P}(\alpha) \tilde{Q}(\alpha)$.

1.5 Dérivée d'un polynôme

Définition 1.29 Le **polynôme dérivé** du polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est le polynôme suivant, noté P' ,

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1}$$

Il s'agit d'une dérivation formelle : il n'y a rien à justifier pour dériver un polynôme. Mais cette dérivation formelle des polynômes correspond à la dérivation usuelle sur les fonctions polynomiales et on retrouve donc les mêmes formules.

Proposition 1.30 Soient deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

a) $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$

b) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

Définition 1.31 Pour tout polynôme P , on définit les **dérivées n -ièmes** de P par récurrence avec

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall n \in \mathbb{N}, P^{(n+1)} = (P^{(n)})' \end{cases}$$

Exemple 1.32 Soit $P = X^3 + X + 1$. Donner les dérivées successives de P .

Exemple 1.33 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P = X^n$. Donner les dérivées successives de P .

Proposition 1.34 — Dérivation et degré. Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$\begin{aligned} \text{a) } \deg(P') &= \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} & \text{b) } \deg(P^{(n)}) &= \begin{cases} \deg(P) - n & \text{si } \deg(P) \geq n \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, on a,

$$P' = 0 \iff P \text{ est un polynôme constant.}$$

Exemple 1.35 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ à l'aide du polynôme $P = (X + 1)^n$.

Proposition 1.36 — Formule de Leibniz. Soient deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Exemple 1.37 En remarquant que $X^{2n} = X^n \times X^n$, donner la dérivée n -ième du polynôme $P = X^{2n}$.

Proposition 1.38 — Formule de Taylor polynomiale. Pour tout $a \in \mathbb{K}$ et tout $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n ,

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k = P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P''(a)}{2!} (X-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (X-a)^n$$

Exemple 1.39 Appliquer la formule de Taylor pour $P = X^2 - 1$ et $a = 1$.

2 Division de polynômes

2.1 Relation de divisibilité

Définition 2.1 Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que A **divise** B si

$$\exists P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } B = AP$$

On note alors $A \mid B$. On dit aussi que A est un **diviseur de** B , ou que B est **divisible par** A , ou que B est un **multiple de** A .

Exercice 2.2 Justifier les relations de divisibilité suivantes.

- a) Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \mid P$ car
- b) Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \mid 0$ car
- c) $X \mid X^3 - 2X$ car
- d) $X^2 + 1 \mid X^4 - 1$ car

Proposition 2.3 Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Si $A \mid B$ alors $B = 0$ ou $\deg(A) \leq \deg(B)$.

Démonstration. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $A \mid B$. Alors

$$\exists P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } B = AP$$

Donc, par propriété sur les degrés,

$$\deg(B) = \deg(AP) = \deg(A) + \deg(P)$$

Si $B \neq 0$, alors A et P sont également non nuls et en particulier, $\deg(P) \geq 0$. On en déduit donc que

$$\deg(B) = \deg(A) + \deg(P) \geq \deg(A)$$

Ce qui conclut la démonstration. ■

Exemple 2.4 Montrer que $X + 1$ divise $X^2 + 3X + 2$.

2.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Rappelons d'abord la notion de division euclidienne dans $\mathbb{N}$: Pour tout couple d'entiers n et d , il existe un unique couple d'entiers q et r tels que

$$n = d \times q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < d.$$

Cela revient à trouver la quantité qu'il reste après le partage équitable «le plus grand possible». Par exemple, si on veut partager équitablement 30 billes entre 7 enfants, chacun aura 4 billes et il en restera 2 :

$$30 = 7 \times 4 + 2.$$

Proposition 2.5 Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple de polynômes $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B)$$

Le polynôme Q est appelé le **quotient** de la division euclidienne de A par B , et le polynôme R est appelé le **reste**.

Preuve de l'unicité de la division euclidienne. Supposons qu'il existe (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) deux couples de polynômes vérifiant la relation de l'énoncé :

a) $A = BQ_1 + R_1$ avec $\deg(R_1) < \deg(B)$

b) $A = BQ_2 + R_2$ avec $\deg(R_2) < \deg(B)$

Montrons que $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$. On sait que $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ et donc,

$$R_2 - R_1 = B(Q_1 - Q_2)$$

Montrons par l'absurde que $Q_1 = Q_2$. Supposons que $Q_1 \neq Q_2$.

- D'une part,

$$\deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$$

- D'autre part,

$$\deg(R_2 - R_1) = \deg(B(Q_1 - Q_2)) = \deg(B) + \underbrace{\deg(Q_1 - Q_2)}_{\geq 0} \geq \deg(B)$$

Ceci est absurde. Donc $Q_1 = Q_2$ et puis $R_1 = R_2$. ■

Expliquons l'algorithme de la division euclidienne entre polynômes directement sur un exemple.

Exemple 2.6 Effectuer la division euclidienne du polynôme $A = X^5 + 4X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 1$ par le polynôme $B = X^3 - 2X + 3$.

Exemple 2.7 Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P_n = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$ par $B = X^2 - 5X + 6$.

Proposition 2.8 Soient A et B deux polynômes avec $A \neq 0$. On a,

$$A \mid B \iff \text{le reste } R \text{ de la division euclidienne de } B \text{ par } A \text{ est nul.}$$

Exemple 2.9 Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.

3 Racines de polynôme

Définition 3.1 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** (un zéro) de P si $P(\alpha) = 0$.

Exemple 3.2 Donner une racine évidente pour chacun des polynômes suivants.

Polynôme	<u>Une</u> racine
$P = X - 1$	
$P = (X - 1)(X - 2)$	
$P = X^3 + X^2 + X$	
$P = 2$	
$P = 0$	
$P = X^2 + 1$	

3.1 Théorème de factorisation

Proposition 3.3 — Théorème de factorisation. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors,

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff X - \alpha \text{ divise } P$$

Dans ce cas, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha)Q$$

Démonstration. En effectuant la division euclidienne de P par $X - \alpha$, on obtient l'existence de deux polynômes Q et R tel que

$$P = (X - \alpha)Q + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(X - \alpha)$$

Ainsi, R est de degré $-\infty$ ou 0. Il peut donc s'écrire de la forme $R = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. En évaluant l'égalité en α , on obtient $\lambda = P(\alpha)$, soit $R = P(\alpha)$. Ainsi,

$$P = (X - \alpha)Q + P(\alpha)$$

Ainsi,

$$\alpha \text{ racine de } P \iff P(\alpha) = 0 \iff P = (X - \alpha)Q$$

Ce qui conclut la preuve. ■

Exemple 3.4 Trouver toutes les racines complexes du polynôme $P = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ et en déduire sa factorisation.

3.2 Multiplicité d'une racine

Définition 3.5 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est racine de P de **multiplicité** m si

$$\begin{cases} \textcircled{1} (X - \alpha)^m \text{ divise } P \\ \textcircled{2} (X - \alpha)^{m+1} \text{ ne divise pas } P. \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad P = (X - \alpha)^m \times Q(X) \quad \text{avec} \quad Q(\alpha) \neq 0$$

En particulier,

- Si α est racine de P de multiplicité $m = 1$, on dit que α est **racine simple**.
- Si α est racine de P de multiplicité $m = 2$, on dit que α est **racine double**.
- Si α est racine de P de multiplicité $m \geq 2$, on dit que α est **racine multiple**.
- Parfois, si α n'est pas racine de P , on dit que α est racine de multiplicité 0.

Ainsi, par exemple la multiplicité se lit facilement sur la forme factorisée du polynôme.

Exemple 3.6 Donner les racines (avec multiplicité) du polynôme suivant.

$$P = X(X - 1)^2(X - 4)(X - 5)^3$$

La forme factorisée d'un polynôme étant difficile à obtenir, on utilise plutôt la caractérisation suivante pour calculer la multiplicité grâce aux dérivées successives.

Proposition 3.7 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\alpha \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité exactement } m \iff \begin{cases} 1. P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ 2. P^{(m)}(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

Démonstration. Avec la formule de Taylor polynomiale. ■

Exemple 3.8 Montrer que 1 est une racine de $P = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$ et déterminer sa multiplicité.

Exemple 3.9 Montrer que le polynôme $P = X^n - 1$ n'admet que des racines simples.

3.3 Cas des polynômes à coefficients complexes

Définition 3.10 Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$. On définit le **polynôme conjugué** $\bar{P}$ de P par $\bar{P} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1X + \dots + \bar{a}_nX^n$.

Exemple 3.11 Donner le polynôme conjugué pour les polynômes suivants.

Polynôme	Conjugué
$P = X + i$	
$P = \frac{1}{2+i}X^2 - 1$	
$P = 2X + 1$	

Proposition 3.12 Pour tout $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et tout $\lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{C}$,

$$\text{a) } \overline{\lambda P + \mu Q} = \bar{\lambda} \bar{P} + \bar{\mu} \bar{Q} \quad \text{b) } \overline{PQ} = \bar{P} \bar{Q} \quad \text{c) } \overline{P(\alpha)} = \bar{P}(\bar{\alpha})$$

Proposition 3.13 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à **coefficients réels** et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff \bar{\alpha} \text{ est racine de } P.$$

Dans ce cas, α et $\bar{\alpha}$ ont la même multiplicité.



Cette proposition ne fonctionne pas si le polynôme est à coefficients complexes. Par exemple, si $P = X - i$ alors

$$P(i) = 0 \quad \text{tandis que} \quad P(-i) = -2i \neq 0$$

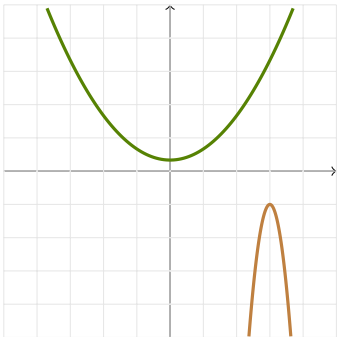
Exemple 3.14 Soit $P = 1 + X + X^2$.

1. Montrer que $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ est une racine de P .
2. En déduire une deuxième racine de P .

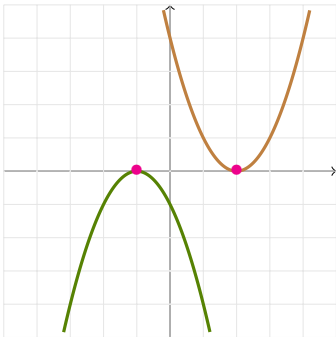
3.4 Nombre de racines et degré du polynôme

Faisons une conjecture sur le nombre possible de racines d'un polynôme en regardant les polynômes de petits degrés.

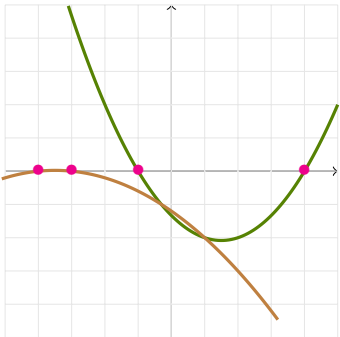
Polynôme de degré...	Nombre de racines possible	Exemple-s
$-\infty$		
0		
1		
2		



Exemples de polynômes de degré 2 qui n'admettent aucune racine.



Exemples de polynômes de degré 2 qui admettent chacun une unique racine.



Exemples de polynômes de degré 2 qui admettent chacun 2 racines distinctes.

Proposition 3.15 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré n . Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des racines distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$. Alors,

$$(X - \alpha_1)^{m_1} \dots (X - \alpha_r)^{m_r} \mid P$$

En particulier,

$$\sum_{i=1}^r m_i \leq n$$

Exemple 3.16 Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que 1 est racine double de P , 3 est racine simple de P et $P(2) = 1$. Déterminer l'expression de P .

Proposition 3.17 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si P est de degré $n \geq 1$ alors P admet au plus n racines (racines distinctes ou confondues) dans $\mathbb{K}$.

En particulier,

- Un polynôme non nul de degré n possède au plus n racines distinctes.
- Si P possède une infinité de racines alors c'est le polynôme nul : $P = 0$.
- Si $\deg(P) \leq n$ et P admet au moins $n + 1$ racines (comptées avec multiplicité) alors c'est le polynôme nul : $P = 0$.
- Si P et Q sont de degré inférieur ou égal à n et coïncident en $n + 1$ points distincts alors $P = Q$.

Pour certains exercices, il faut savoir interpréter les hypothèses en termes de racines d'un certain polynôme pour pouvoir conclure.

Exercice 3.18 Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ vérifiant

$$\text{pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(a_k) = Q(a_k).$$

Montrons que $P = Q$. Pour cela, on peut introduire le polynôme $R = P - Q$.

1. Déterminons le degré de R .
2. Déterminons les racines de R .
3. Conclusion.

Le résultat suivant nous dit que l'on peut identifier polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, si deux fonctions polynomiales sont égales alors leurs coefficients sont égaux (propriété utilisée régulièrement depuis le lycée).

Proposition 3.19 Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors $P = Q$ si et seulement si les fonctions polynomiales associées à P et Q sont égales.

Exemple 3.20 Montrer que la fonction sinus n'est pas une fonction polynomiale.

3.5 Polynôme scindé et théorème de d'Alembert-Gauss

Définition 3.21

- Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n est dit **scindé** sur $\mathbb{K}$ s'il n'est pas constant et possède exactement n racines comptées avec multiplicité. Cela revient à dire qu'il peut s'écrire sous la forme factorisée

$$P = \lambda \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k}$$

où λ est le coefficient dominant de P , $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont les racines distinctes de P (de multiplicité respectives $m_1, \dots, m_p$) et $m = m_1 + \dots + m_p$ est le degré de P . Une telle décomposition est unique à l'ordre près des termes.

- Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n est dit **scindé à racines simples** si P est scindé et possède n racines distinctes.

Exemple 3.22 Dire si les polynômes suivants sont scindés ou non.

Polynôme	Factorisation ?	Scindé ?
$P = X^2 - 2X + 1$		
$P = X^2 - 4$		
$P = X^2 + 1$		
$P = X^2 + 1$		

Exemple 3.23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $P = X^n - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Proposition 3.24 — Théorème de d'Alembert-Gauss. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine complexe. Et donc, tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.



C'est pour cela que l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ a été créé ! On était embêtés par le fait que certains polynômes n'admettaient pas de racines dans $\mathbb{R}$. On a alors construit un ensemble fait pour que n'importe quel polynôme admette une racine dans cet ensemble.

3.6 Relations coefficients-racines

Dans cette partie, on considère des polynômes scindés (en particulier, sur $\mathbb{C}$, c'est toujours le cas comme on vient de le voir). Commençons par étudier le cas des polynômes de degrés 2 et 3.

Proposition 3.25 — Relations coefficients-racines. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ un polynôme de degré deux de la forme

$$P = aX^2 + bX + c$$

On suppose que P est scindé donc il admet deux racines réelles que l'on note α_1 et α_2 . Dans ce cas, on a

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \times \alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

Exemple 3.26 Résoudre le système suivant d'inconnues $(r, s) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} r + s = -3 \\ r \times s = 2 \end{cases}$$

Exemple 3.27 Déterminer les relations coefficients-racines pour un polynôme scindé de degré 3.

Nous disposons du cas général suivant.

Proposition 3.28 Soit $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé de degré $n \geq 1$. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P (distinctes ou non). Alors,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Exemple 3.29 Trouver les racines du polynôme $P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ en admettant qu'il est scindé.

4 Polynômes irréductibles

4.1 Définition et décomposition en produit de facteurs irréductibles

Définition 4.1 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est **irréductible** (sur $\mathbb{K}$) si

- ❶ P n'est pas constant
- ❷ P n'est divisible que par les constantes non nulles ou les polynômes λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Exemple 4.2 Dire si les polynômes suivants sont scindés ou non.

Polynôme	Factorisation ?	Irréductible ?
$P = X^2 - 2X + 1$		
$P = X^2 - 4$		
$P = X^2 + 1$		
$P = X^2 + 1$		
$P = aX + b$ (avec $a \neq 0$)		

Exemple 4.3 Soit P un polynôme de degré 2 ou 3. Montrer que

$$P \text{ irréductible} \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ n'a pas de racine}$$

Montrer que cette équivalence est fausse si P est de degré supérieur ou égal à 4.

Proposition 4.4 — Polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.

Proposition 4.5 — Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement

- les polynômes de degré 1
- les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif

4.2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Proposition 4.6 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors P s'écrit de manière unique à l'ordre près des termes sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ est le coefficient dominant de P et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines complexes deux à deux distinctes de P , $m_1, \dots, m_r$ sont les multiplicités respectives des racines avec $\sum_{i=1}^r m_i = \deg(P)$.

Exemple 4.7 Factoriser (dans $\mathbb{C}$) les polynômes suivants.

a) $X^2 - 1$

b) $X^2 - 2$

c) $X^2 + 4$

d) $X^2 + X + 1$

e) $X^4 - 1$

f) $X^3 - 1$

Exemple 4.8 Factoriser le polynôme $P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

Exemple 4.9 Factoriser le polynôme $P = X^4 + 1$.

4.3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Rappelons que les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif sont les polynômes sans racines réelles. Le résultat suivant énonce que tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ est produit de polynômes de degré 1 ou 2.

Proposition 4.10 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors P s'écrit de manière unique à l'ordre près des termes sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{k=1}^s (X^2 + b_k X + c_k)^{n_k}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ est le coefficient dominant de P , $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines réelles deux à deux distinctes de P , $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives et pour tout $j \in \{1, \dots, s\}$, $X^2 + b_j X + c_j$ sont des polynômes à coefficients réels sans racines réelles (donc de discriminant négatif).

En pratique, on calcule souvent la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme sur $\mathbb{C}$ (comme produit de polynômes de degré 1), puis on regroupe les racines complexes conjuguées non réelles entre elles.

Exemple 4.11 Déterminer la factorisation en produit de facteurs irréductibles de $P = X^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

On peut aussi utiliser le théorème de factorisation, en se restreignant à factoriser dans $\mathbb{R}$ les polynômes qui apparaissent.

Exemple 4.12 Factoriser le polynôme $P = X^3 + 8$.

5 Décomposition en éléments simples

Proposition 5.1 Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On suppose que B est scindé à racines simples, de la forme $B = a \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et tels que $A(\lambda_i) \neq 0$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{a_1}{x - \lambda_1} + \dots + \frac{a_n}{x - \lambda_n}$$

où $Q \in \mathbb{K}[X]$ est le quotient de la division euclidienne de A par B et les $a_i \in \mathbb{K}$. Cette écriture est appelée **décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle A/B** .

? La décomposition en éléments simples d'une fraction est très utile pour effectuer par exemple des calculs d'intégrales.

$$\int_2^3 \frac{1}{t^2 - 1} dt = \int_2^3 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} \right) dt = \left[\frac{1}{2} \ln(|t-1|) - \frac{1}{2} \ln(|t+1|) \right]_2^3 = (\dots)$$

Exemple 5.2 Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{X^4 + 1}{X^3 - X}$.

? La décomposition peut être plus compliquée mais normalement la forme cherchée vous sera donnée. Il existe alors de multiples façons de calculer les coefficients des constantes des numérateurs :

- a) Multiplier par $(X - \lambda)^m$ puis évaluer en λ ,
- b) Multiplier par X et passer à la limite en $+\infty$,
- c) Évaluer en un point,
- d) Mettre au même dénominateur et identifier,
- e) Utiliser la parité,
- f) ...

Exemple 5.3 Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, posons $F(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^2}$. Déterminer a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad F(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$$