

TD 21 – Polynômes

1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1 – Identification des coefficients. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$a(X+2)^2 + b(X+3)^2 = cX + 10$$

2. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}, \quad \frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

Exercice 2 – Polynôme défini par certaines valeurs. Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$. Ce polynôme est-il unique ?

Exercice 3 – Opérations sur les polynômes. Soient $P = 2X^2 - X - 1$ et $Q = -X + 1$. Calculer les polynômes suivants.

- | | |
|----------------|----------------|
| a) $P - Q$ | b) PQ |
| c) $P(X^2)$ | d) $Q(X+1)$ |
| e) $P \circ Q$ | f) $Q \circ P$ |

Exercice 4 – Formule du binôme de Newton. Développer les polynômes suivants à l'aide du binôme de Newton.

- | | |
|---------------|---------------|
| a) $(X+1)^3$ | b) $(2X-1)^3$ |
| c) $(-X+i)^4$ | d) $(X+2)^4$ |

Exercice 5 – Factorisation. Factoriser les polynômes suivants par la quantité indiquée.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $X^3 - 8$ par $X - 2$ | b) $X^4 - 1$ par $X - 1$ |
| c) $X^3 + i$ par $X - i$ | |

Exercice 6 – Degré. Soient P et Q deux polynômes définis par,

$$P = 3X^3 + 4X^2 + 5 \quad \text{et} \quad Q = X^2 - 7X + 1$$

- Pour les deux polynômes P et Q , donner :
 - leur coefficient constant,
 - leur degré,
 - leur coefficient dominant,
 - un entier n tels qu'ils appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$.
- Sans faire de calculs, donner une information sur le degré des polynômes suivants :

- | | | |
|----------|-----------|-----------|
| i) $-2P$ | ii) $P+Q$ | iii) PQ |
|----------|-----------|-----------|

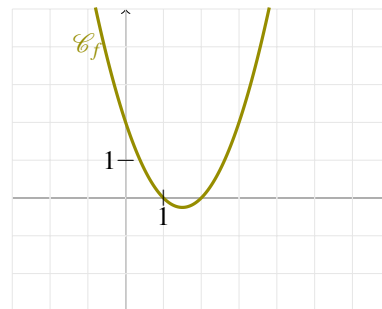
Exercice 7 – Degré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un polynôme P de degré n . Déterminer le degré et le coefficient dominant de $Q = X^2P' + P$ et $R = XP' + P$.

Exercice 8 – Degré. On considère la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = 2XP_n - 2nP_{n-1}$.

- Calculer P_2 et P_3 .
- Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
- Déterminer la parité de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 – Fonction polynomiale. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative ci-dessous d'une fonction polynomiale du second degré.

- Résoudre graphiquement
 - l'équation $f(x) = 0$
 - l'inéquation $f(x) > 0$
 - l'inéquation $f(x) \geq 0$
- Puis déterminer l'expression explicite de la fonction f et vérifier les résultats précédents.



Exercice 10 – Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de la somme

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$$

en dérivant de deux manières différentes le polynôme $(X+1)^n$.

Exercice 11 – Formule de Leibniz. On admet que la formule de Leibniz n'est pas seulement valable pour les polynômes mais pour les fonctions aussi.

- Calculer toutes les dérivées successives de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$.
- Calculer toutes les dérivées successives de la fonction $x \mapsto e^{2x}$.
- On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$$

À l'aide de la formule de Leibniz, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = e^{2x} [2^n(x^2 + 1) + 2^n nx + n(n-1)2^{n-2}]$$

Exercice 12 – Formule de Taylor. Écrire la formule de Taylor en 2 du polynôme $P = X^3 - 2X^2 - 3$.

2 Division de polynômes

Exercice 13 – Divisibilité. Justifier les relations de divisibilité suivantes.

- | | |
|--|------------------------|
| a) Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $1 P$ | b) $X X^4 - X + X^2$ |
| c) $X - 1 X^6 - 1$ | d) $X - 3 X^2 - X - 6$ |

Exercice 14 – Division euclidienne. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants.

- Pour $A = X^3 + 1$ et $B = X^2 + X + 1$
- Pour $A = 2X^5 + X^3 + 17X - 2$ et $B = X^2 + 2X + 3$
- Pour $A = X^3 - iX^2 - X$ et $B = X - 1 + i$

Exercice 15 – Divisibilité. Montrer que $A|B$ dans les cas suivants.

- Pour $A = X^2 + 4X + 3$ et $B = 2X^3 + 4X^2 - 10X - 12$
- Pour $A = X^2 + 1$ et $B = X^4 + 2X^2 + 1$

Exercice 16 – Juste le reste. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

Exercice 17 – Juste le reste. Soit $n \in \mathbb{N}$, θ , a et b trois éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = (\sin(\theta)X + \cos(\theta))^n$ par $B = X^2 + 1$

Exercice 18 – Divisibilité. Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^2 + 1$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 1$.

Exercice 19 – Soient $n \geq 2$, $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X - 1)^2$.

- Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B .
- En utilisant la formule de Taylor, montrer que le quotient de la division euclidienne de A par B vaut

$$Q = \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} (X-1)^{j-2}.$$

3 Racines de polynômes

Exercice 20 – Soit $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$.

- Montrer que 2 est racine de P . Quel est son ordre de multiplicité?
- Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 21 – Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme

$$P_a = X^3 - 3X + a$$

- Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a le polynôme P_a possède une racine de multiplicité au moins 2.
- Factoriser alors ces polynômes P_a dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 22 – Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = 4X^3 - 4X^2 - 15X + 18$ sachant qu'il admet une racine multiple.

Exercice 23 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$. Démontrer que $(X-1)^2$ divise P_n .

Exercice 24 – Théorème de factorisation. Soit $P = 3X^3 - X - 2$.

- Donner le nombre maximal de racines distinctes possible pour le polynôme P .
- Vérifier que 1 est une racine évidente du polynôme P .
- Trouver un polynôme Q tel que,

$$P = (X-1)Q.$$

- En déduire toutes les racines de P et la factorisation de P .
- Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Exercice 25 – Nombre infini de racines ?. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = n^3 - n^2 + 1$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^3 - x^2 + 1$$

Exercice 26 – Nombre infini de racines ?. On cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

- Vérifier que si α est racine de P alors $\alpha + 1$ également.
- En déduire que si P admet au moins une racine alors P en admet une infinité.
- Conclure.

Exercice 27 – Polynômes scindés. Dire si les polynômes suivants sont scindés sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

- $2X^2 - 2X - 4$
- $3X^2 - X + 2$
- $X^2 + 2$
- $X^4 - 1$

Exercice 28 – Relations coefficients-racines. Les deux questions sont indépendantes.

- Résoudre le système suivant d'inconnues $(r, s) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} r + s = -2 \\ r \times s = -15 \end{cases}$$

(Indication : On montrera que s et r sont les racines d'un polynôme à déterminer.)

- Déterminer l'âge de Marc et Sophie sachant que Marc est le plus âgé, que la somme de leurs âges est égale à 28 et que le produit de leurs âges est égal à 192. (Indication : $28^2 = 784$. On montrera que les âges de Marc et Sophie sont les racines d'un polynôme à déterminer.)

4 Polynômes irréductibles

Exercice 29 – Factoriser en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

- $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$
- $X^5 - 1$
- $X^4 + 16$
- $3X^3 + 24$
- $X^8 - 1$
- $X^4 + 3X^2 - 4$
- $2X^4 - 6X^2 - 56$
- $X^9 + X^6 + X^3 + 1$
- $(X^2 - X + 1)^2 + 1$

5 Décomposition en éléments simples

Exercice 30 – Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

- $F = \frac{1}{(X-1)(X-2)}$
- $F = \frac{X}{X^2 - 3X + 2}$
- $F = \frac{X^4}{X^2 - 3X + 2}$

Exercice 31 –

- Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

- Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de $\frac{X^5}{X^4 - 1}$. En déduire celle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32 – Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré.

- $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \text{ sur }]1, 2[$
- $g : x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 3x + 2} \text{ sur }]2, +\infty[$