

TD 21 – Polynômes (Correction)

1 L'ensemble

$\mathbb{K}[X]$

Exercice 1 – Identification des coefficients. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$a(X+2)^2 + b(X+3)^2 = cX + 10$$

2. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}, \quad \frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

Cf correction manuscrite ci-dessous.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En développant, on obtient,

$$\begin{aligned} a(x+2)^2 + b(x+3)^2 &= a(x^2 + 4x + 4) + b(x^2 + 6x + 9) \\ &= \underline{ax^2 + 4ax + 4a} + \underline{bx^2 + 6bx + 9b} \\ &= \underline{(a+b)x^2 + (4a+6b)x + 4a+9b} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a(x+2)^2 + b(x+3)^2 = cx + 10 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (a+b)x^2 + (4a+6b)x + 4a+9b = 0x^2 + cx + 10$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 4a+6b=c \\ 4a+9b=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ 4a+6b=c \\ 4a+9(-a)=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=4 \\ a=-2 \end{cases}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} &= \frac{a x(x+1) + b(x-1)(x+1) + c(x-1)x}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{ax^2 + ax + bx^2 - b + cx^2 - cx}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(a+b+c)x^2 + (a-c)x - b}{x(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} &= \frac{2}{x(x-1)(x+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ -b=-2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ -b-2c=0 \\ b=-2 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=1 \\ b=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$,

$$\frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}$$

Exercice 2 – Polynôme défini par certaines valeurs. Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$. Ce polynôme est-il unique ?

Cf correction manuscrite ci-dessous.

On cherche $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré 2 tq

$$(S) \begin{cases} P(-1) = 1 \\ P(0) = -1 \\ P(1) = -1 \end{cases}$$

On peut chercher P sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b, c des réels à déterminer.

Avec ces notations, le système (S) devient

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 1 \\ c = -1 \\ a + b + c = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - (-a) = 2 \\ b = -a \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

car on a raisonné par équivalence

Finalement, il existe un unique polynôme vérifiant les trois conditions (S) qui est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 - x - 1.$$

Exercice 3 – Opérations sur les polynômes. Soient $P = 2X^2 - X - 1$ et $Q = -X + 1$. Calculer les polynômes suivants.

a) $P - Q = 2X^2 - 2$

b) $PQ = -2X^3 + 3X^2 - 1$

c) $P(X^2) = 2X^4 - X^2 - 1$

d) $Q(X+1) = -X$

e) $P \circ Q = 2X^2 - 3X$

f) $Q \circ P = -2X^2 + X + 2$

Exercice 4 – Formule du binôme de Newton. Développer les polynômes suivants à l'aide du binôme de Newton.

a) $(X + 1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$

b) $(2X - 1)^3 = 8X^3 - 12X^2 + 6X - 1$

c) $(-X + i)^4 = X^4 - 4iX^3 - 6X^2 + 4iX + 1$

d) $(X + 2)^4 = X^4 + 8X^3 + 24X^2 + 32X + 16$

Exercice 5 – Factorisation. Factoriser les polynômes suivants par la quantité indiquée.

a) $X^3 - 8$ par $X - 2$

$$X^3 - 8 = (X - 2)(X^2 + 2X + 4)$$

b) $X^4 - 1$ par $X - 1$

$$X^4 - 1 = (X - 1)(X^3 + X^2 + X + 1)$$

c) $X^3 + i$ par $X - i$

$$X^3 + i = (X - i)(X^2 + iX - 1)$$

Exercice 6 – Degré. Soient P et Q deux polynômes définis par,

$$P = 3X^3 + 4X^2 + 5 \quad \text{et} \quad Q = X^2 - 7X + 1$$

1. Pour les deux polynômes P et Q , donner :
 - leur coefficient constant,
 - leur degré,
 - leur coefficient dominant,
 - un entier n tels qu'ils appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$.
2. **Sans faire de calculs**, donner une information sur le degré des polynômes suivants :

i) $-2P$ ii) $P+Q$ iii) PQ

Cf correction manuscrite ci-dessous.

1.

	P	Q
coeff. constant	5	1
degré	3	2
coeff. dom.	3	1
ensemble	$\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}_4[X], \dots$	$\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_3[X], \dots$

2. On a :

- $\deg(-2P) = \deg(P) = 3$
- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q) = \max(3, 2) = 3$
- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q = 3 + 2 = 5$

Exercice 7 – Degré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un polynôme P de degré n . Déterminer le degré et le coefficient dominant de $Q = X^2P' + P$ et $R = XP' + P$.

Comme P est un polynôme de degré n , il peut se mettre sous la forme

$$P = a_n X^n + S$$

avec $a_n \neq 0$ et $\deg(S) \leq n-1$.

- Alors,

$$\begin{aligned} Q &= X^2 P' + P \\ &= X^2 (na_n X^{n-1} + S') + a_n X^n + S \\ &= na_n X^{n+1} + \underbrace{X^2 S' + a_n X^n + S}_{\deg \leq n} \end{aligned}$$

Donc, Q est de degré $n+1$ et de coefficient dominant na_n .

- De même,

$$\begin{aligned} R &= XP' + P = X(na_n X^{n-1} + S') + a_n X^n + S \\ &= na_n X^n + XS' + a_n X^n + S \\ &= (n+1)a_n X^n + \underbrace{XS' + S}_{\deg \leq n-1} \end{aligned}$$

Donc P est de degré n et de coefficient dominant $(n+1)a_n$.

Exercice 8 – Degré. On considère la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = 2XP_n - 2nP_{n-1}$.

1. Calculer P_2 et P_3 .

On a,

$$P_2 = 2XP_1 - 2P_0 = 4X^2 - 2$$

$$P_3 = 2XP_2 - 2P_1 = 8X^3 - 8X$$

2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .

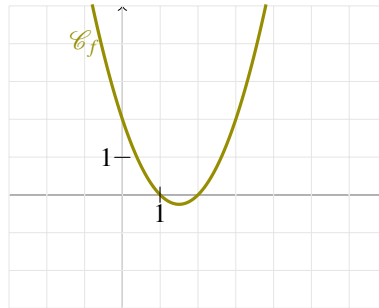
On peut montrer **par récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est degré n et que son coefficient dominant vaut 2^n .

3. Déterminer la parité de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

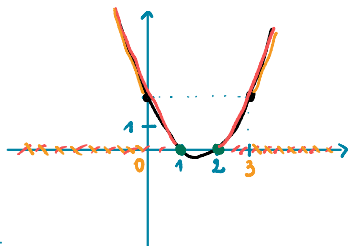
On peut montrer **par récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est paire si n est pair et est impaire si n est impair.

Exercice 9 – Fonction polynomiale. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative ci-dessous d'une fonction polynomiale du second degré.

- Résoudre graphiquement
 - a) l'équation $f(x) = 0$
 - b) l'inéquation $f(x) > 0$
 - c) l'inéquation $f(x) \geq 2$
- Puis déterminer l'expression explicite de la fonction f et vérifier les résultats précédents.



Cf correction manuscrite ci-dessous.



- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2 \\ f(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[\\ f(x) > 2 &\Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[\end{aligned}$$

- Comme le polynôme P
 - est de degré 2
 - admet 1 et 2 comme racines (d'après le graphique)
 il est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a(x-1)(x-2)$$

où a est son coeff. dominant (réel) à déterminer.

On d'après le graphique,

$$P(0) = 2$$

Donc $a \in \mathbb{R}$ doit nécessairement vérifier

$$a \times (0-1)(0-2) = 2$$

$$\text{c-à-d } a = 1.$$

Finalement, le polynôme P est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(x-2)$$

Exercice 10 – Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de la somme

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$$

en dérivant de deux manières différentes le polynôme $(X+1)^n$.

Tout d'abord, on peut remarquer que, à l'aide de la **formule du binôme de Newton**,

$$P = (X+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$$

En dérivant deux fois l'égalité suivante, on obtient,

$$P'' = n(n-1)(X+1)^{n-2} = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} X^{k-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} X^{k-2}$$

(on peut changer l'indice de début de la somme car les termes dans la somme pour $k=0$ et $k=1$ sont nuls). Puis, en évaluant l'égalité en 1, on obtient,

$$n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$$

Exercice 11 – Formule de Leibniz. On admet que la formule de Leibniz n'est pas seulement valable pour les polynômes mais pour les fonctions aussi.

1. Calculer toutes les dérivées successives de la fonction $f_1 : x \mapsto x^2 + 1$.

On peut calculer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1^{(0)}(x) = x^2 + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1^{(1)}(x) = 2x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1^{(2)}(x) = 2$$

$$\forall k \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1^{(k)}(x) = 0$$

2. Calculer toutes les dérivées successives de la fonction $f_2 : x \mapsto e^{2x}$.

On peut montrer par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_2^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$$

3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$$

À l'aide de la formule de Leibniz, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = e^{2x} [2^n(x^2 + 1) + 2^n n x + n(n-1)2^{n-2}]$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= (f_1 \times f_2)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_1^{(k)} \times f_2^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} f_1^{(k)} \times f_2^{(n-k)} \quad \text{car, pour tout } k \geq 3, f_1^{(k)} = 0 \\ &= \binom{n}{0} f_1^{(0)} \times f_2^{(n-0)} + \binom{n}{1} f_1^{(1)} \times f_2^{(n-1)} + \binom{n}{2} f_1^{(2)} \times f_2^{(n-2)} \\ &= f_1 \times f_2^{(n)} + n f_1' \times f_2^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} f_1'' \times f_2^{(n-2)} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = (x^2 + 1)2^n e^{2x} + n 2x 2^{n-1} e^{2x} + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \times 2^{n-2} e^{2x}$$

On obtient alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = e^{2x} [2^n(x^2 + 1) + 2^n n x + n(n-1)2^{n-2}]$$

Exercice 12 – Formule de Taylor. Écrire la formule de Taylor en 2 du polynôme $P = X^3 - 2X^2 - 3$.

$$P = -3 + 4(X-2) + 4(X-2)^2 + (X-2)^3$$

2 Division de polynômes

Exercice 13 – Divisibilité. Justifier les relations de divisibilité suivantes.

a) Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $1|P$

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$\boxed{P = 1 \times P} \quad \text{donc} \quad \boxed{1|P}$$

b) $X|X^4 - X + X^2$

$$\boxed{X^4 - X + X^2 = X \times (X^3 - 1 + X)} \quad \text{donc} \quad \boxed{X|X^4 - X + X^2}$$

c) $X - 1|X^6 - 1$

$$\boxed{X^6 - 1 = (X - 1) \times (X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)} \quad \text{donc} \quad \boxed{X - 1|X^6 - 1}$$

d) $X - 3|X^2 - X - 6$

$$\boxed{X^2 - X - 6 = (X - 3) \times (X + 2)} \quad \text{donc} \quad \boxed{X - 3|X^2 - X - 6}$$

Exercice 14 – Division euclidienne. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants.

1. Pour $A = X^3 + 1$ et $B = X^2 + X + 1$

$$\begin{array}{r} X^3 \\ -X^3 - X^2 - X \\ \hline -X^2 - X + 1 \\ X^2 + X + 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

Donc,

$$A = B \times (X - 1) + 2$$

2. Pour $A = 2X^5 + X^3 + 17X - 2$ et $B = X^2 + 2X + 3$

$$\begin{array}{r}
 2X^5 + X^3 + 17X - 2 \quad \Bigg| \frac{X^2 + 2X + 3}{2X^3 - 4X^2 + 3X + 6} \\
 \underline{-2X^5 - 4X^4 - 6X^3} \\
 -4X^4 - 5X^3 \\
 \underline{4X^4 + 8X^3 + 12X^2} \\
 3X^3 + 12X^2 + 17X \\
 \underline{-3X^3 - 6X^2 - 9X} \\
 6X^2 + 8X - 2 \\
 \underline{-6X^2 - 12X - 18} \\
 -4X - 20
 \end{array}$$

Donc,

$$A = B \times (2X^3 - 4X^2 + 3X + 6) + (-4X - 20)$$

3. Pour $A = X^3 - iX^2 - X$ et $B = X - 1 + i$

De même, on trouve

$$A = B \times (X^2 + (1 - 2i)X - (2 + 3i)) + (-5 - i)$$

Exercice 15 – Divisibilité. Montrer que $A|B$ dans les cas suivants.

a) Pour $A = X^2 + 4X + 3$ et $B = 2X^3 + 4X^2 - 10X - 12$

On effectue la division euclidienne de B par A :

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 + 4X^2 - 10X - 12 & X^2 + 4X + 3 \\ -2X^3 - 8X^2 - 6X & 2X - 4 \\ \hline -4X^2 - 16X - 12 & \\ 4X^2 + 16X + 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc,

$$B = A \times (2X - 4)$$

Donc

$$\boxed{A|B}$$

b) Pour $A = X^2 + 1$ et $B = X^4 + 2X^2 + 1$

On effectue la division euclidienne de B par A :

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 2X^2 + 1 & X^2 + 1 \\ -X^4 - X^2 & X^2 + 1 \\ \hline X^2 + 1 & \\ -X^2 - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc,

$$B = A \times (X^2 + 1)$$

(On pouvait obtenir directement cette égalité en remarquant une identité remarquable...)

Donc

$$\boxed{A|B}$$

Exercice 16 – Juste le reste. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

$$R = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$$

Exercice 17 – Juste le reste. Soit $n \in \mathbb{N}$, θ , a et b trois éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = (\sin(\theta)X + \cos(\theta))^n$ par $B = X^2 + 1$

Par division euclidienne, on sait qu'il existe deux polynômes Q et R tels que

$$(*) \quad A = Q \times B + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < 2$$

Comme $\deg(R) < 2$, on le cherche sous la forme

$$R = aX + b$$

avec a et b deux constantes à déterminer. On trouve a et b en évaluant $(*)$ en des nombres bien choisis. Comme on ne connaît pas Q , on va évaluer en les racines de B pour le «faire disparaître». En évaluant en i , on trouve

$$A(i) = Q(i) \times B(i) + R(i) \quad \text{c-à-d} \quad e^{i\theta n} = ai + b$$

En évaluant en $-i$, on trouve

$$e^{-i\theta n} = -ai + b$$

En sommant ces deux relations, on trouve, grâce aux formules d'Euler,

$$2b = e^{i\theta n} + e^{-i\theta n} = 2\cos(n\theta)$$

En faisant la différence de ces deux relations, on trouve, grâce aux formules d'Euler,

$$2ai = e^{i\theta n} - e^{-i\theta n} = 2i\sin(n\theta)$$

Ainsi,

$$\boxed{R = \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)}$$

Exercice 18 – Divisibilité. Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^2 + 1$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 1$.

On peut effectuer la division euclidienne de $A = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 1$ par $B = X^2 + 1$.

$$\begin{array}{r}
 X^4 + X^3 \qquad + aX^2 \qquad + bX \qquad + 1 \quad \left| \begin{array}{l} X^2 + 1 \\ X^2 + X + (-1 + 1a) \end{array} \right. \\
 \underline{-X^4} \qquad \qquad \underline{-X^2} \\
 X^3 + (-1 + 1a)X^2 \qquad + bX \\
 \underline{-X^3} \qquad \qquad \underline{-X} \\
 (-1 + 1a)X^2 + (-1 + 1b)X \qquad + 1 \\
 \underline{-(-1 + 1a)X^2} \qquad \underline{-(-1 + 1a)} \\
 (-1 + 1b)X + (1 + -1a)
 \end{array}$$

On trouve

$$A = B \times (X^2 + X + (-1 + a)) + (-1 + b)X + 1 - a$$

Ainsi,

$$\begin{array}{ll}
 \boxed{B|A} & \Leftrightarrow \text{le reste de la d.e. de B par A vaut 0} \\
 & \Leftrightarrow (-1 + b)X + 1 - a = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + b = 0 \\ 1 - a = 0 \end{cases} \text{ par identification} \\
 & \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}}
 \end{array}$$

Exercice 19 – Soient $n \geq 2$, $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X - 1)^2$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B . $R = (n+2)X - n - 1$
2. En utilisant la formule de Taylor, montrer que le quotient de la division euclidienne de A par B vaut

$$Q = \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} (X - 1)^{j-2}.$$

3 Racines de polynômes

Exercice 20 – Soit $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$.

1. Montrer que 2 est racine de P . Quel est son ordre de multiplicité?

On peut calculer que

$$P(2) = 0$$

donc 2 est racine de P . Pour déterminer son ordre de multiplicité, il faut évaluer les dérivées successives de P en 2. On peut montrer que

$$P'(2) = 0$$

$$P''(2) = 0$$

$$P'''(2) \neq 0$$

Donc 2 est racine de P multiplicité 3.

2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Comme 2 est racine de P de multiplicité 3, on sait que $(X - 2)^3$ divise P , c'est-à-dire qu'il existe Q tel que

$$P = (X - 2)^3 \times Q$$

Pour trouver le polynôme Q , on peut effectuer la division euclidienne de P par $(X - 2)^3$. On peut aussi remarquer que Q est nécessairement de degré 1 (car P est de degré 4), donc $Q = aX + b$ avec a et b deux constantes :

$$P = (X - 2)^3 \times (aX + b)$$

En identifiant les coefficients dominants, on trouve que $a = 1$. En identifiant les coefficients constants, on trouve que $24 = -8b$ c'est-à-dire $b = -3$. Ainsi,

$$P = (X - 2)^3 \times (X - 3)$$

Exercice 21 – Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme

$$P_a = X^3 - 3X + a$$

1. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a le polynôme P_a possède une racine de multiplicité au moins 2.

Raisonnons par analyse-synthèse.

- *Analyse.* Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que le polynôme P_a possède une racine de multiplicité au moins 2. Alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(x_0) = P'(x_0) = 0$$

Or,

$$P' = 3X^2 - 3$$

Comme $P'(x_0) = 0$,

$$x_0 = 1 \quad \text{ou} \quad x_0 = -1$$

- Si $x_0 = 1$, comme on sait aussi que $P(x_0) = 0$, alors $a = 2$.
- Si $x_0 = -1$, comme on sait aussi que $P(x_0) = 0$, alors $a = -2$.
- *Synthèse.* Si $a = 2$, on vérifie que P admet 1 comme racine de multiplicité au moins 2. Si $a = -2$, on vérifie que P admet -1 comme racine de multiplicité au moins 2.

Ainsi,

P_a possède une racine de multiplicité au moins 2	$\Leftrightarrow$	$a = 2$ ou $a = -2$
---	-------------------	---------------------

2. Factoriser alors ces polynômes P_a dans $\mathbb{R}[X]$.

Si $a = 2$,

$P_2 = X^3 - 3X + 2 = (X - 1)^2(X + 2)$

et si $a = -2$,

$P_{-2} = X^3 - 3X - 2 = (X + 1)^2(X - 2)$
--

Exercice 22 – Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = 4X^3 - 4X^2 - 15X + 18$ sachant qu'il admet une racine multiple.

$$P = 4 \left(X - \frac{3}{2} \right)^2 (X + 2)$$

Exercice 23 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$. Démontrer que $(X-1)^2$ divise P_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer que $(X-1)^2$ divise P_n , il suffit de montrer que 1 est racine de P_n de multiplicité au moins 2, donc il suffit de montrer que $P_n(1) = P'_n(1) = 0$. Or,

$$P_n(1) = n1^{n+1} - (n+1)1^n + 1 = 0$$

De plus,

$$P'_n = n(n+1)X^n - (n+1)nX^{n-1}$$

donc,

$$P'_n(1) = n(n+1)1^n - (n+1)n1^{n-1} = 0$$

Donc, 1 est racine de P_n de multiplicité au moins 2 donc $(X-1)^2$ divise P_n .

Exercice 24 – Théorème de factorisation. Soit $P = 3X^3 - X - 2$.

0. Donner le nombre maximal de racines distinctes possible pour le polynôme P .

1. Vérifier que 1 est une racine évidente du polynôme P .

2. Trouver un polynôme Q tel que,

$$P = (X - 1)Q.$$

3. En déduire toutes les racines de P et la factorisation de P .

4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Cf correction manuscrite ci-dessous.

On considère le polynôme P donné par:
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 3x^3 - x - 2$

0. Comme P est de degré 3, il peut admettre au plus trois racines distinctes.

1. On a :

$$P(1) = 3 \times 1^3 - 1 - 2 = 0$$

donc 1 est une racine de P .

2. On cherche un polynôme Q tq

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)Q(x)$

• Alors nécessairement, Q est un polynôme de degré 2 donc on peut le chercher sous la forme
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = ax^2 + bx + c$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} (x-1)Q(x) &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = (x-1)Q(x)$$

si et seulement si a, b, c sont solutions de

$$\begin{cases} a &= 3 \\ -a + b &= 0 \\ -b + c &= -1 \\ -c &= -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

3. D'après la Question 2, on a

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)Q(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$$

Donc il reste seulement à regarder les racines de Q .

Comme Q est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant :

$$\bullet \text{ on a } \Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 2 = 9 - 24 = -15$$

• comme $\Delta < 0$, le polynôme Q n'admet pas de racines réelles.

Donc P admet seulement 1 comme racine réelle.

4. On utilise la forme factorisée de P pour dresser son tableau de signe.

	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
$3x^2+3x+2$	+	+	+
$P(x)$	-	0	+

} car le polynôme Q n'admet pas de racine réelle et son coefficient dominant est positif

Donc $P \geq 0$ sur $[1; +\infty[$

et $P \leq 0$ sur $]-\infty, 1]$

Exercice 25 – Nombre infini de racines ?. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = n^3 - n^2 + 1$.
Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^3 - x^2 + 1$$

Posons $Q = P - (X^3 - X^2 + 1)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$. Le polynôme Q admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Donc $P = X^3 + X^2 - 1$.

Exercice 26 – Nombre infini de racines ?. On cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

1. Vérifier que si α est racine de P alors $\alpha + 1$ également.

On suppose que α est une racine de P . Montrons que $\alpha + 1$ est aussi une racine de P . En évaluant en α la relation de l'énoncé, on a,

$$P(\alpha + 1) = P(\alpha) = 0$$

car α est une racine de P . Donc, $\alpha + 1$ est aussi une racine de P .

2. En déduire que si P admet au moins une racine alors P en admet une infinité.

Si P admet une racine α , alors en itérant le processus précédent, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est aussi une racine de P . Et donc, P admet une infinité de racines.

3. Conclure.

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme P admet au moins une racine complexe. D'après la question précédente, on en déduit que P admet une infinité de racines et donc que $P = 0$. Le polynôme nul est le seul polynôme vérifiant $P(X+1) = P(X)$.

Exercice 27 – Polynômes scindés. Dire si les polynômes suivants sont scindés sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

a) $2X^2 - 2X - 4$

Comme

$$2X^2 - 2X - 4 = 2(X + 1)(X - 2)$$

scindé sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{C}$.

b) $3X^2 - X + 2$

Comme $\Delta < 0$, non scindé sur $\mathbb{R}$ mais scindé sur $\mathbb{C}$ car

$$3X^2 - X + 2 = 3\left(X - \frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{23}}{6}\right)\left(X + \frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{23}}{6}\right)$$

c) $X^2 + 2$

Comme $\Delta < 0$, non scindé sur $\mathbb{R}$ mais scindé sur $\mathbb{C}$ car

$$X^2 + 2 = (X - i\sqrt{2})(X + i\sqrt{2})$$

d) $X^4 - 1$

Comme

$$X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$$

non scindé sur $\mathbb{R}$ mais scindé sur $\mathbb{C}$

Exercice 28 – Relations coefficients-racines. Les deux questions sont indépendantes.

1. Résoudre le système suivant d'inconnues $(r, s) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} r + s = -2 \\ r \times s = -15 \end{cases}$$

(Indication : On montrera que s et r sont les racines d'un polynôme à déterminer.)

2. Déterminer l'âge de Marc et Sophie sachant que Marc est le plus âgé, que la somme de leurs âges est égale à 28 et que le produit de leurs âges est égal à 192. (Indication : $28^2 = 784$. On montrera que les âges de Marc et Sophie sont les racines d'un polynôme à déterminer.)

Cf correction manuscrite ci-dessous.

1. Soit $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ solution de

$$\begin{cases} r + s = -2 \\ r \times s = -15 \end{cases}$$

Alors r et s sont les racines du polynôme suivant :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, P(x) &= x^2 - (r+s)x + r \times s \\ &= x^2 + 2x - 15 \end{aligned}$$

Comme P est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant :

. on a $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64$

. comme $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles données par :

$$\frac{-2 + \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 + 8}{2} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{-2 - \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 - 8}{2} = -5$$

Donc l'ensemble des solutions est donné par :

$$\mathcal{S} = \{ (3, -5), (-5, 3) \}$$

Vérification : $\begin{cases} 3 \times (-5) = -15 \\ 3 - 5 = -2 \end{cases}$

2. Notons s l'âge de Sophie
et m l'âge de Marc.

D'après l'énoncé, (s, m) est solution de :

$$\begin{cases} s + m = 28 \\ s \times m = 192 \\ m > s \end{cases}$$

Alors m et s sont les racines du polynôme suivant :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, P(x) &= x^2 - (m+s)x + m \times s \\ &= x^2 - 28x + 192 \end{aligned}$$

Comme P est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant :

. on a $\Delta = (-28)^2 - 4 \times 192 = 784 - 768 = 16$

. comme $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles données par :

$$\frac{-(-28) + \sqrt{16}}{2} = \frac{28 + 4}{2} = 16 \quad \text{et} \quad \frac{-(-28) - \sqrt{16}}{2} = \frac{28 - 4}{2} = 12$$

Comme $m > s$, nécessairement

$$m = 16 \quad \text{et} \quad s = 12$$

4 Polynômes

irréductibles

Exercice 29 – Factoriser en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants.

a) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$

On a,

$$\begin{aligned} X^3 + 2X^2 + 2X + 1 &= (X + 1)(X^2 + X + 1) && \text{décomp. en irréductibles sur } \mathbb{R}[X] \\ &= (X + 1) \left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) && \text{décomp. en irréductibles sur } \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

b) $X^5 - 1$

On a,

$$\begin{aligned} X^5 - 1 &= (X - 1)(X - e^{\frac{2i\pi}{5}})(X - e^{\frac{4i\pi}{5}})(X - e^{\frac{6i\pi}{5}})(X - e^{\frac{8i\pi}{5}}) && \text{décomp. en irréductibles sur } \mathbb{C}[X] \\ &= (X - 1)(X - e^{\frac{2i\pi}{5}})(X - e^{\frac{4i\pi}{5}})(X - e^{-\frac{4i\pi}{5}})(X - e^{-\frac{2i\pi}{5}}) \\ &= (X - 1)(X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X + 2i\sin(\frac{2\pi}{5}))(X^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})X + 2i\sin(\frac{4\pi}{5})) && \text{décomp. en irréd. sur } \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

c) $X^4 + 16$

Pour trouver la décomposition sur $\mathbb{C}$, on résout l'équation $z^4 = -16$. Puis pour trouver la décomposition sur $\mathbb{R}$, on regroupe les racines conjuguées ensemble (2 par 2).

d) $3X^3 + 24$

On a,

$$\begin{aligned} 3X^3 + 24 &= 3(X + 2)(X^2 - 2X + 4) && \text{décomp. en irréductibles sur } \mathbb{R}[X] \\ &= 3(X + 2) \left(X - 1 + i\sqrt{3} \right) \left(X - 1 - i\sqrt{3} \right) && \text{décomp. en irréductibles sur } \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

e) $X^8 - 1$

Pour trouver la décomposition sur $\mathbb{C}$, on résout l'équation $z^8 = 1$ (c'est-à-dire on trouve les racines 8ièmes de l'unité). Puis pour trouver la décomposition sur $\mathbb{R}$, on regroupe les racines conjuguées ensemble (2 par 2).

f) $X^4 + 3X^2 - 4$

On a,

$$\begin{aligned} X^4 + 3X^2 - 4 &= (X-1)(X+1)(X^2+4) && \text{décomp. en irréductibles sur } \mathbb{R}[X] \\ &= (X-1)(X+1)(X-2i)(X+2i) && \text{décomp. en irréductibles sur } \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

g) $2X^4 - 6X^2 - 56$

On a,

$$\begin{aligned} 2X^4 - 6X^2 - 56 &= 2(X^2+4)(X-\sqrt{7})(X+\sqrt{7}) && \text{décomp. en irréductibles sur } \mathbb{R}[X] \\ &= 2(X-2i)(X+2i)(X-\sqrt{7})(X+\sqrt{7}) && \text{décomp. en irréductibles sur } \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

h) $X^9 + X^6 + X^3 + 1$

Pour factoriser ce polynôme, on peut commencer par démontrer que

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = (Z+1)(Z^2+1)$$

Ainsi, en posant $Z = X^3$, on récupère que

$$X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X^3+1)(X^6+1)$$

Or,

$$X^3 + 1 = X^3 - (-1)^3 = (X+1)(X^2 - X + 1)$$

et

$$X^6 + 1 = (X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$$

Les deux polynômes de degré 2 qui apparaissent ont un discriminant strictement négatif. Donc, la décomposition en irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ est

$$X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)(X^2+1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$$

Puis, en factorisant les polynômes de degré 2 restants sur $\mathbb{C}$, on obtient que la décomposition en irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ est

$$\begin{aligned} X^9 + X^6 + X^3 + 1 &= (X+1) \left(X - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(X - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (X-i)(X+i) \\ &\quad \times \left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) \left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

i) $(X^2 - X + 1)^2 + 1$

On a,

$$\begin{aligned} (X^2 - X + 1)^2 + 1 &= (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 1) && \text{décomp. en irréductibles sur } \mathbb{R}[X] \\ &= (X - (1 - i))(X - (1 + i))(X - i)(X + i) && \text{décomp. en irréductibles sur } \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

5 Décomposition en éléments simples

Exercice 30 – Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

a) $F = \frac{1}{(X-1)(X-2)}$

On trouve

$$F = \frac{1}{X-2} - \frac{1}{X-1}$$

b) $F = \frac{X}{X^2-3X+2}$

On trouve

$$F = \frac{2}{X-2} - \frac{1}{X-1}$$

c) $F = \frac{X^4}{X^2-3X+2}$

On trouve

$$F = X^2 + 3X + 7 + \frac{16}{X-2} - \frac{1}{X-1}$$

Exercice 31 –

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

On trouve que

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

2. Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de $\frac{X^5}{X^4-1}$. En déduire celle sur $\mathbb{R}$.

On a,

$$F = X - \frac{1}{4(X-i)} - \frac{1}{4(X+i)} + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)}$$

puis

$$F = X - \frac{X}{2(X^2+1)} + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)}$$

Exercice 32 – Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré.

a) $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \text{ sur }]1, 2[$

On peut commencer par montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}, \quad f(x) = -\frac{5}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{5}{x-3}$$

Ainsi, une primitive de f sur $]1, 2[$ est

$$x \mapsto -5 \ln(|x-2|) + \ln(|x-1|) + 5 \ln(|x-3|)$$

c'est-à-dire

$x \mapsto -5 \ln(-x+2) + \ln(x-1) + 5 \ln(-x+3)$

b) $g : x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 3x + 2} \text{ sur }]2, +\infty[$

On peut commencer par montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}, \quad f(x) = 1 - \frac{8}{x-1} + \frac{13}{x-2}$$

Ainsi, une primitive de f sur $]2, +\infty[$ est

$$x \mapsto x - 8 \ln(|x-1|) + 13 \ln(|x-2|)$$

c'est-à-dire

$x \mapsto x - 8 \ln(x-1) + 13 \ln(x-2)$