

DM 6

À rendre pour le mardi 24 février (facultatif)

Exercice 1 – Dans cet exercice, on cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X^2 - 1) = P(X - 1)P(X + 1) \quad (E)$$

1. Déterminer les polynômes constants solutions de (E).
2. Déterminer les polynômes de degré 1 solutions de (E).

On suppose pour toute la suite que P est un polynôme non constant **vérifiant l'équation (E)**. On note $d = \deg(P) > 0$.

3. Quel théorème assure alors l'existence d'une racine de P dans $\mathbb{C}$?

Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P . On pose $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$$

4. Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (u_n + 1)^2 - 1$$

5. Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P .
6. Expliquer pourquoi on ne peut pas (encore) conclure de la question précédente que P admet une infinité de racines.

On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{R}$ est une **racine réelle** de P et on définit f par :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 2x \end{array}$$

7. Préciser le tableau de variations de f . On fera apparaître dans le tableau les limites qui auront été soigneusement justifiées au préalable.
8. En déduire que $u_1 \in [-1, +\infty[$.
9. Premier cas. On suppose dans un premier temps que $u_1 \in]0, +\infty[$.
 - (a) Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, +\infty[$.
 - (b) Montrer alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
 - (c) En déduire une contradiction à propos de P .

Deuxième cas. On suppose que si $u_1 \in [-1, 0[$, alors on aboutit aussi à une contradiction.

10. Finalement, que vaut u_1 ?
11. En déduire que l'unique racine réelle de P est 0.
12. On admet que P n'admet pas de racine dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).