

COLLES 19 & 20 - Du 02/03 au 06/03 & du 09/03 au 13/03

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours (voir page 2).

Chapitre 19 - Suites Récurrentes

- Savoir représenter graphiquement une suite définie par récurrence
- Bonne définition d'une suite définie par récurrence
- Notion d'intervalle stable
- Savoir étudier la monotonie d'une suite définie par récurrence : via le signe de $x \mapsto f(x) - x$ ou via la croissance de f
- Savoir utiliser le théorème de la convergence monotone pour montrer qu'une suite converge et savoir déterminer la valeur de la limite via l'équation de point fixe
- Inégalité des accroissements finis et son utilisation pour l'étude des suites

Chapitre 20 - Application

- Application, ensemble de définition, ensemble d'arrivée
- Représentation graphique d'une fonction, savoir déterminer graphiquement antécédent/image
- Savoir déterminer l'image/l'ensemble des antécédents d'un élément par une application
- Fonction identité, indicatrice d'un ensemble
- Notion de restriction et de prolongement
- Composition de deux applications
- Image directe d'une application, $\text{Im}(f)$ (savoir repérer graphiquement, savoir déterminer par double inclusion)
- Image réciproque d'une application
- Notion d'injectivité
- Notion de surjectivité
- Notion de bijectivité

Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice de cours seront demandés parmi les suivants. La question de cours sera notée sur cinq points, et de même pour l'exercice de cours, soit un total de **10 points** (sur les 20 au total). Néanmoins, tout énoncé du cours pourra faire l'objet d'une question de cours, à tout moment de la colle.

Un énoncé :

- ☐ Notion d'intervalle stable (Chap 19 - Définition 1.5)
- ☐ Donner l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis (Chap 19 - Définition 2.3)

- ☐ Donner la définition d'une fonction injective + sa caractérisation (si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$) (Chap 20 - Déf 4.1 + Prop 4.2, Point 3 seulement)
- ☐ Donner la définition d'une fonction surjective + sa caractérisation ($\forall y, \exists x, y = f(x)$) (Chap 20 - Déf 4.9 + Prop 4.10, Point 3 seulement)
- ☐ Donner la définition d'une fonction bijective + sa caractérisation ($\forall y, \exists !x, y = f(x)$) (Chap 20 - Déf 4.17 + Prop 4.18, Point 2 seulement)

Un exercice :

- ☐ On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n} \end{cases}$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0, 1]$. (Chap 19 - Ex 1.9)
- ☐ Montrer que, (Chap 19 - Ex 2.4)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$$

- ☐ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Calculer les images directes suivantes. On s'appuiera pour le raisonnement d'une représentation graphique de la fonction. (Chap 20 - Ex 3.3)

- a) $f([0, 1])$ b) $f([-2, -1])$
- c) $f([-1, 2])$ d) $\text{im}(f)$

- ☐ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$. Déterminer les images réciproques suivantes. On s'appuiera pour le raisonnement d'une représentation graphique de la fonction. (Chap 20 - Ex 3.9)

- a) $f^{-1}(\{0\})$ b) $f^{-1}(\{4\})$
- c) $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$ d) $f^{-1}([-2, 4]) = [-2, 2]$

- ☐ On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x, x^2) \end{aligned}$$

- Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est injective. (Chap 20 - Ex 4.4)
- ☐ On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

- Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective. (Chap 20 - Ex 4.12)