

TD 22 – Arithmétique des entiers

1 Divisibilité

dans

$\mathbb{N}$

Exercice 1 – Divisibilité. Dire si les relations de divisibilité suivantes sont vraies ou fausses.

a) $2 \mid 124$

b) $7 \mid 22$

c) $11 \mid 121$

d) $13 \mid 65$

Exercice 2 – Diviseurs. Donner la liste des diviseurs de 42.

Exercice 3 – Divisibilité. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(n-1) \mid (n+11)$.

Exercice 4 – Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, le nombre $5^n - 1$ est divisible par 4.

Exercice 5 – Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3 \mid (7^n - 4^n)$ sans faire une récurrence.

Exercice 6 – Démontrer les propriétés suivantes.

1. Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$.
2. Si $a \mid b$ et $b \mid a$ alors $a = b$.
3. Si $a \mid b$ et $c \mid d$ alors $ac \mid bd$.
4. Si $a \mid b$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n \mid b^n$.
5. Si $a \mid b$ alors $a \mid bc$.
6. Si $ab \mid c$ alors $a \mid c$ et $b \mid c$.

2 Division

euclidienne

Exercice 7 – Division euclidienne. Effectuer la division euclidienne de a par b pour

a) $a = 473$ et $b = 6$

b) $a = 784$ et $b = 15$

c) $a = 578$ et $b = 25$

Exercice 8 – Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de n par 45. On trouve que le reste est égal au carré du quotient. Quelles sont les valeurs possibles de n ?

Exercice 9 – Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 < a < b$. On effectue les divisions euclidiennes de a par $b - a$ et de b par $b - a$. Comparer les restes et les quotients obtenus.

3 PGCD,

PPCM

Exercice 10 – Calculer de tête les PGCD et PPCM suivants.

a) PGCD(3, 12)

b) PPCM(3, 12)

c) PGCD(10, 8)

d) PPCM(10, 8)

Exercice 11 – Calcul de PGCD avec l'algorithme d'Euclide. Calculer le PGCD de a et b pour :

a) $a = 255$ et $b = 141$

b) $a = 401$ et $b = 130$

c) $a = 3465$ et $b = 600$

Exercice 12 – Nombres premiers entre eux. Dire si les nombres suivants sont premiers entre eux.

a) 8 et 24

b) 3 et 12

c) 11 et 24

d) 401 et 130

Exercice 13 – Calcul de PPCM. On pose $a = 720$ et $b = 252$.

1. Calculer le PGCD de a et b .
2. En déduire le PPCM de a et b .
3. En déduire la valeur de

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Exercice 14 – Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a, b - a)$. On pourra montrer que les deux entiers se divisent mutuellement.

Exercice 15 – Déterminer tous les entiers naturels $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que

$$\text{PGCD}(a, b) = 18 \quad \text{et} \quad a + b = 360.$$

On pourra commencer par se ramener à des nombres premiers entre eux.

4 Nombres

premiers

Exercice 16 – Montrer que 167 est un nombre premier.

Exercice 17 – Décomposition en facteurs premiers.

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants.

a) 63

b) 70

c) 140

d) 280

2. En déduire la liste des diviseurs de 63.

3. En déduire les valeurs suivantes.

a) $\text{PGCD}(63, 70)$

b) $\text{PPCM}(63, 70)$

c) $\text{PGCD}(140, 63)$

d) $\text{PPCM}(140, 63)$

Exercice 18 – Crible d'Eratosthène. On peut dresser la liste des nombres premiers $p \leq n$ de manière algorithmique en utilisant le crible d'Eratosthène. Pour cela, on peut écrire tous les nombres compris entre 2 à n , puis procéder comme suit:

1. le plus petit nombre est 2 qui est premier, et tous les multiples stricts de 2 ne sont pas premiers, on élimine alors tous ces multiples,
2. le premier nombre restant est 3, qui est donc premier, et tous les multiples stricts de 3 ne sont pas premiers, on élimine alors tous ces multiples,
3. le premier nombre restant est 5, qui est donc premier, et tous les multiples stricts de 5 ne sont pas premiers, on élimine alors tous ces multiples,
4. on poursuit ainsi jusqu'à tomber sur un nombre supérieur à $\sqrt{n}$.

Les entiers non élimés sont alors exactement les nombres premiers inférieurs à n puisque les entiers non premiers inférieurs à n possèdent un diviseur premier inférieur à $\sqrt{n}$ et ont donc été éliminés. Appliquer l'algorithme pour déterminer tous les premiers compris entre 1 et 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Exercice 19 – Soit $n \geq 2$. Montrer qu'aucun des entiers compris entre $n! + 2$ et $n! + n$ n'est premier. Comment obtenir n entiers consécutifs non premiers ?