23. Continuité d'une fonction

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Fonctions continues

1.1 Continuité en un point

L'étude de la continuité d'une fonction en un point a n'est possible que si a appartient à l'ensemble de définition de f, c'est-à-dire que si $f(a)$ existe. Ce n'est pas le cas pour l'étude des limites : on peut étudier la limite en un point pour lequel la fonction n'existe pas.

Définition 1.1 Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

1. On dit que f **est continue à droite en** a lorsque

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

2. On dit que f **est continue à gauche en** a lorsque

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

3. On dit que f **est continue en** a lorsque, de manière équivalente,
   - soit lorsque f admet une limite finie en a et

   $$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$$

   c'est-à-dire
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \delta$$
   - soit lorsque f est continue à droite en a et elle est continue à gauche en a.

? La notion de continuité formalise le fait que l'on peut tracer la courbe de la fonction “sans lever le crayon”. Autrement dit, là où la fonction comporte des “trous”, elle est discontinue.

Exemple 1.2 Montrer que la fonction partie entière n'est pas continue en 2.

Exemple 1.3 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ (x+1)^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en 0 ?

Exemple 1.4 Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Pour quelle·s valeur·s de k, la fonction f est-elle continue en 0 ?

1.2 Continuité sur un intervalle

Définition 1.5 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I. On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.6

- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fractions rationnelles sont continues sur les intervalles où leur dénominateur ne s'annule pas.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme est continue sur $]0, +\infty[$.
- Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière est continue sur $[n, n+1[$ et discontinue en n (elle y est continue à droite mais pas à gauche).

! C'est grâce à la propriété de continuité que l'on peut affirmer que

$$\lim_{x \to a} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a \ (a \in \mathbb{R}) \qquad \lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \ (a \geqslant 0) \qquad \lim_{x \to a} \ln(x) = \ln(a) \ (a > 0)$$

Proposition 1.7

1. Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs réelles et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Si f et g sont continues sur I, alors $\lambda f + \mu g$ est continue sur I.
   (b) Si f et g sont continues sur I, alors fg est continue sur I.
   (c) Si f ne s'annule pas sur I et si f est continue sur I, $1/f$ est continue sur I.
   (d) Si g ne s'annule pas sur I et si f et g sont continues sur I, f/g est continue sur I.
2. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, tels que :
   (a) $\forall x \in I$, $f(x) \in J$;
   (b) f est continue sur I ;
   (c) g est continue sur J.
   Alors $g \circ f$ est continue sur I.

En pratique, on étudie la continuité «à la main» qu'aux points qui posent problème (par exemple, les points de raccordements d'une fonction définie par morceaux). Le reste est géré grâce à la continuité des fonctions usuelles et par opérations sur les fonctions continues.

Exemple 1.8 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.9 On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $]0, +\infty[$.

Exemple 1.10 On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

Exemple 1.11 On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \ln(1+x^2).$$

Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

1.3 Lien entre continuité et convergence d'une suite

Proposition 1.12 — Caractérisation séquentielle de la continuité. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La fonction est continue en a.
2. Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

! C'est grâce à la propriété de continuité que l'on peut affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n+2) - \ln(n+1) =$$

Lorsqu'une suite définie par récurrence via

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers ℓ, pour justifier que la limite ℓ vérifie l'équation de point fixe

$$\ell = f(\ell)$$

il faut justifier que f est **continue** en ℓ.

Exemple 1.13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = -2 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 6. Conclure quant à la convergence de cette suite.

1.4 Prolongement par continuité

Définition 1.14 Soient $a \in I$ et f définie sur $I\backslash\{a\}$ (donc f n'est **pas définie en** a). On dit que f est **prolongeable par continuité en** a lorsque f admet une limite réelle en a. Dans ce cas, la fonction $\tilde{f}$ (parfois notée encore f) définie sur I par

$$\forall x \in I, \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}$$

est appelée **prolongement par continuité de** f **en** a.

Ne pas confondre :

- étude de la continuité en a (la fonction est définie en a),
- étude du prolongement par continuité en a (la fonction n'est pas définie en a).

Exemple 1.15 Étudier le prolongement par continuité en 0 de la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x) \end{array}$$

Exemple 1.16 Étudier le prolongement par continuité en 0 de la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2} \end{array}$$

Exemple 1.17 Étudier le prolongement par continuité en 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2 Théorèmes impliquant de la continuité

Dans toute cette section, il est impératif de travailler sur un intervalle.

Définition 2.1 Un **intervalle** est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}\backslash\{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}\backslash\{+\infty\}$.

? Un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$ "sans trou". Par exemple, $]-\infty,5]$ est un intervalle mais $[-\infty,3]\cup[4,5]$ n'en est pas un.

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Proposition 2.2 — TVI, v1. L'image directe d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Illustration graphique.

Proposition 2.3 — TVI, v2. Soient $a<b$ deux nombres réels. On suppose que

① la fonction f est **continue** sur $[a,b]$.

Alors, pour tout $k\in[f(a),f(b)]$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $k=f(c)$.

Illustration graphique.

De manière générale, le TVI ne donne pas d'unicité. Il faut rajouter une hypothèse de stricte monotonie pour l'obtenir.

Proposition 2.4 Soient $a<b$ deux nombres réels. On suppose que

① la fonction f est **continue** sur $[a,b]$

② la fonction f est **strictement monotone** sur $[a,b]$

Alors, pour tout $k\in[f(a),f(b)]$, il existe un unique $c\in[a,b]$ tel que $k=f(c)$.

Exemple 2.5 On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 3x^2 + 2 \end{array}$$

Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet <u>au moins</u> une solution dans $[2,3]$, c'est-à-dire

$$\exists x \in [2,3], \quad 1 = f(x).$$

Exemple 2.6 On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x} - 2x + 1 \end{array}$$

Montrer que l'élément e admet un antécédent (compris entre -1 et 0) par la fonction f.

Proposition 2.7 — TVI, v3. Soient $a < b$ deux nombres réels.

a) On suppose que

   ① la fonction f est **continue** sur $[a,b]$

   ② et $f(a)f(b) \leqslant 0$.

   Alors, la fonction f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$:

$$\exists c \in [a,b], \qquad f(c) = 0$$

b) Autrement dit, si I est un intervalle et que $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction **continue** qui ne s'annule pas sur I, alors f garde un signe constant sur I.

Principe de dichotomie. Pour se simplifier, on suppose que $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Le but du principe de dichotomie est de trouver $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$. L'idée est alors de s'approcher de c en construisant deux suites qui l'encadrent «de plus en plus proches». On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0$, alors
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = b_n$$
- Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$, alors
$$a_{n+1} = a_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

On peut montrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et qu'elles convergent toutes les deux vers α le point d'annulation de f sur $[a,b]$. ■

Illustration graphique.

Exemple 2.8 On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x} - 2x \end{array}$$

Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

Exemple 2.9 Montrer que l'équation $\ln(x) + 1 = -2x$ admet au moins une solution dans $I = \left[\frac{1}{e^3}, \frac{1}{e}\right]$.

2.2 Théorème des bornes

Définition 2.10 Un **segment** de $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $[a,b]$ avec $a < b$ deux réels.

Proposition 2.11 — Théorème des bornes, v1. L'image directe d'un segment par une application continue est un segment :

$$f([a,b]) = [m,M] \qquad \text{avec} \qquad m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Proposition 2.12 — Théorème des bornes, v2. Soient $a < b$ deux réels.

On suppose que

① la fonction f est définie sur le **segment** $[a,b]$

② la fonction f est **continue** sur $[a,b]$.

Alors f est bornée et atteint ses bornes, autrement dit, elle admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$.

Illustration graphique.

Exemple 2.13 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) > 0.$$

1. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \geqslant m.$$

2. Montrer que ce résultat est faux si on ne travaille pas sur un segment.

3 Brève extension aux fonctions complexes

Dans cette partie, I désigne toujours un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et non réduit à un point. Les fonctions considérées seront maintenant à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 3.1 Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ et $a \in I$.

1. On dit que f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

On peut se ramener facilement à étudier la continuité de fonctions à valeurs réelles grâce à la proposition suivante.

Proposition 3.2 Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ et $a \in I$.

1. La fonction f est continue en a si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en a.
2. La fonction f est continue sur I si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I.

Ce qui reste vrai	**Ce qui est faux/n'a pas de sens**
• Les opérations sur les fonctions continues • La notion de continuité à droite et à gauche • La caractérisation séquentielle de la continuité • Toute fonction continue sur un segment est bornée	• Le théorème des valeurs intermédiaires • Toute comparaison au sens de $\leq$

Exercice 3.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \exp(t + it^2)$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.