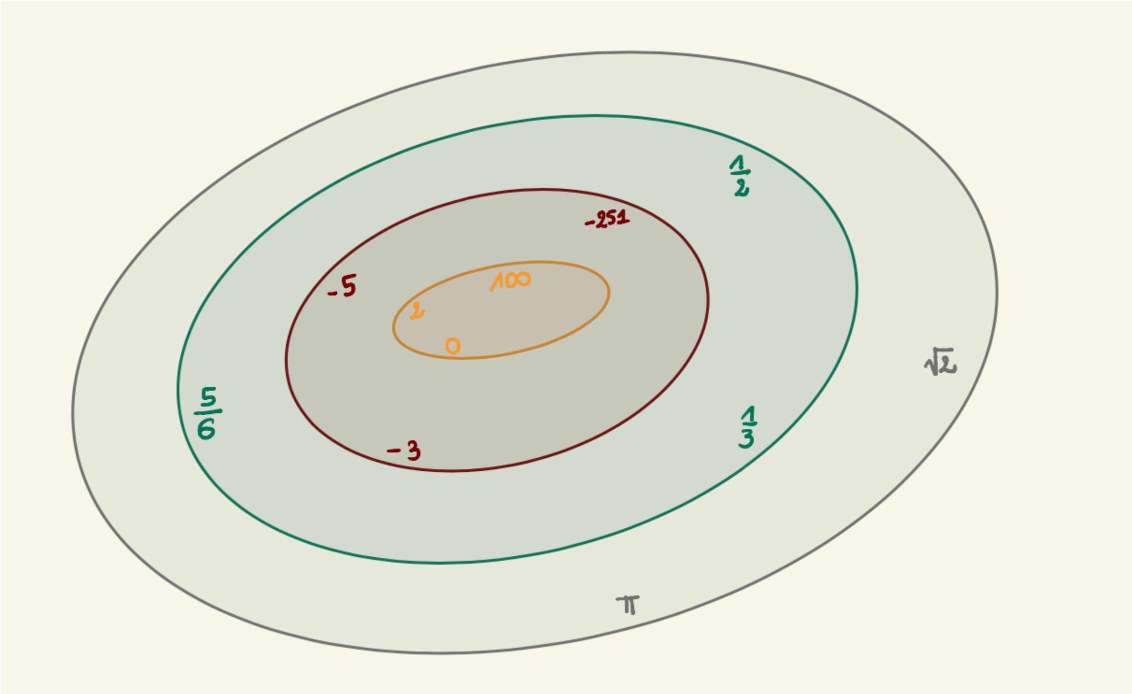
3. Nombres complexes : étude algébrique

Pour bien démarrer : Un point sur les ensembles de nombres

Nom de l'ensemble	Notation	Exemples d'éléments
Ensemble des **entiers naturels**	$\mathbb{N}$	$0, 10, 142, \ldots$
Ensemble des **entiers relatifs**	$\mathbb{Z}$	$-13, 0, 1, \ldots$
Ensemble des **nombres rationnels**	$\mathbb{Q}$	$\frac{1}{2}, -1, 2, \ldots$
Ensemble des **nombres réels**	$\mathbb{R}$	$0, \sqrt{2}, -3, \ldots$

Exemple 0.1 Compléter le schéma ci-dessous, en plaçant correctement les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.



1 Nombres complexes sous la forme algébrique

1.1 Définition

Définition 1.1 Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes**, ayant les propriétés suivantes.

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que

$$\boxed{i^2 = -1}$$

- L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui ont les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2 Écrire les expressions suivantes sous la forme $a+ib$ avec a et b deux nombres réels.

a) $A = (3-2i)+(-2+i)$ (addition)

b) $B = (3-2i)\times(-2+i)$ (multiplication)

c) $C = \frac{1}{2+i}$ (inverse)

d) $D = (1+3i)^2$ (puissance)

e) $E = \frac{1+i}{1-i}$ (division)

1.2 Forme algébrique

Définition 1.3 Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière *unique* sous la forme

$$z = a+ib \qquad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux réels}$$

Cette écriture est appelée **forme algébrique** de z.

- Le nombre réel a est appelé **partie réelle** de z et est noté $\mathrm{Re}(z)$.
- Le nombre réel b est appelé **partie imaginaire** de z et est noté $\mathrm{Im}(z)$.

Exemple 1.4 Donner les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants.

a) $\mathrm{Re}(5-7i) =$

b) $\mathrm{Re}(3) =$

c) $\mathrm{Re}(i) =$

d) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2+i}\right) =$

e) $\mathrm{Im}(5-7i) =$

f) $\mathrm{Im}(3) =$

g) $\mathrm{Im}(i) =$

h) $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2+i}\right) =$

Exemple 1.5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $i(z-3i) = 2z - 1 + i$. On donnera la/les solution·s sous forme algébrique.

Proposition 1.6 — Unicité de la forme algébrique. Pour tous nombres réels a, b, a', b', on a,

$$a + ib = a' + ib' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Autrement dit, pour tous nombres complexes z, z'

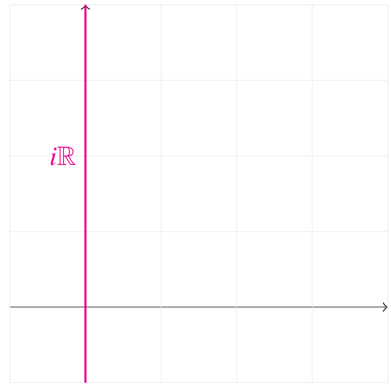
$$z = z' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

<u>Une</u> égalité de nombres complexes se traduit par <u>deux</u> égalités de nombres réels.

Exemple 1.7 Déterminer les valeurs des réels x et y tels que $2x + (3-y)i = 1 + 6i$.

Définition 1.8 — Nombre imaginaire pur. Un nombre complexe de partie réelle nulle, et donc de la forme $z = ib$ avec b un nombre réel est appelé **imaginaire pur**. L'ensemble des nombres imaginaires purs se note $i\mathbb{R}$. Autrement dit,

$$z \in i\mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Re}(z) = 0$$



Exemple 1.9 Dire si les nombres suivants sont imaginaires purs ou non.

a) $5+i$

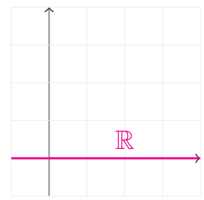
b) $2i$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{2}{i}$

Définition 1.10 — Nombre réel. Un nombre complexe de partie imaginaire nulle est un **nombre réel**, c'est-à-dire appartient à l'ensemble $\mathbb{R}$. Autrement dit,

$$z \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Im}(z) = 0$$



Proposition 1.11 Soient z, z' deux nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$
- $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}(z)$
- $\mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$
- $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Im}(z)$

1.3 Représentation géométrique d'un nombre complexe

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Proposition 1.12 Tout point M (ou vecteur $\vec{u}$) du plan s'identifie à un unique nombre complexe, et inversement, via le procédé suivant :

$$(x, y) \text{ (dans le plan)} \qquad \longleftrightarrow \qquad x + iy \text{ (dans } \mathbb{C})$$

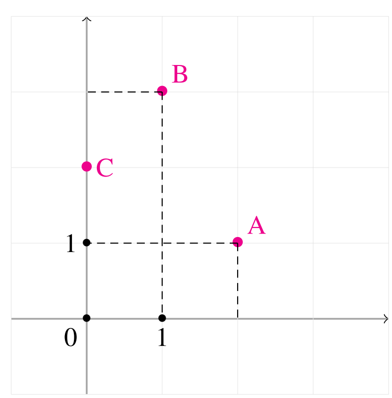
- Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé **affixe** du point du plan $M(x, y)$.
- Le point $M(x, y)$ (ou le vecteur $\vec{u}$) du plan est appelé **image** du nombre complexe $z = x + iy$ et est souvent noté $M(z)$ (ou $\vec{u}(z)$).

Exemple 1.13 Donner l'affixe de chacun des trois points du plan représentés sur la figure.

- Affixe du point $A(2, 1)$:
  $\rightarrow$ Nbre complexe :

- Affixe du point $B(1, 3)$:
  $\rightarrow$ Nbre complexe :

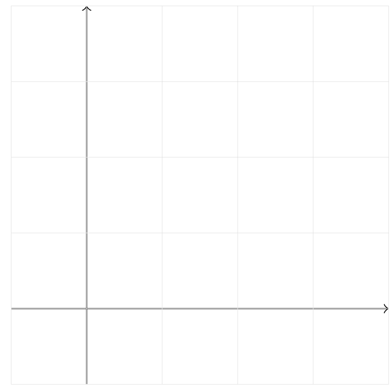
- Affixe du point $C(0, 2)$:
  $\rightarrow$ Nbre complexe :



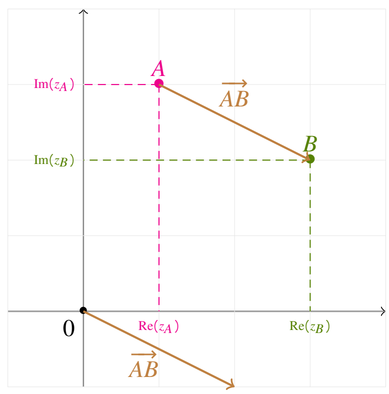
Exemple 1.14 Représenter sur le plan l'image de chacun des trois nombres complexes suivants.

a) $z_1 = 1 + i$ b) $z_2 = i$ c) $z_3 = 2$

- Nombre complexe $z_1 = 1 + i$:
  → Point du plan $M(z_1)$ de coordonnées
- Nombre complexe $z_2 = i$:
  → Point du plan $M(z_2)$ de coordonnées
- Nombre complexe $z_3 = 2$:
  → Point du plan $M(z_3)$ de coordonnées



? Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points du plan, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.



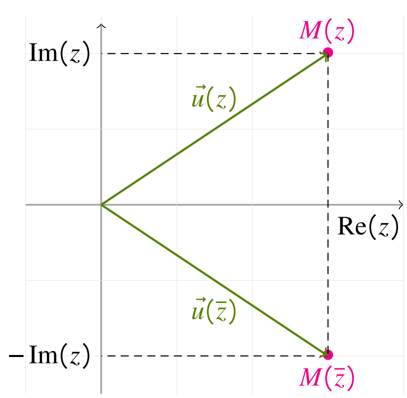
1.4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1.15 — Conjugué. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe (avec a, b deux réels). On appelle **conjugué** de z, que l'on note $\bar{z}$, le nombre complexe

$$\bar{z} = a - ib$$

Autrement dit,

$$\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$$



L'opération de «conjugaison» dans le monde des complexes

$$x + iy \xrightarrow{\text{conjugaison}} x - iy$$

correspond à l'opération de symétrie par rapport à l'axe des abscisses dans le plan.

$$(x, y) \xrightarrow{\text{sym \% abs}} (x, -y)$$

Exemple 1.16 Donner le conjugué des nombres complexes suivants.

a) $2+3i$ b) $-2-7i$ c) 2

d) $3i$ e) $(1+2i)^2$ f) $\frac{1}{2+2i}$

Proposition 1.17 — Règles de calculs autour du conjugué. Soient z_1, z_2 deux nombres complexes.

- *Conjugué du conjugué :* $\overline{\overline{z_1}} = z_1$
- *Conjugué de la somme :* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ (et en particulier $\overline{-z_1} = -\overline{z_1}$)
- *Conjugué du produit :* $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ (et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{(z_1)^n} = (\overline{z_1})^n$)
- *Conjugué du quotient :* si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $\left(\text{et en particulier si } z_2 \neq 0, \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\overline{z_2}}\right)$

Exemple 1.18 Grâce aux règles de calcul, re-calculer le conjugué des nombres complexes suivants.

a) $(1+2i)^2$ b) $\frac{1}{2+2i}$

Proposition 1.19 Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. On sait que

L_1	$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$
L_2	$\overline{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$
$L_1 + L_2$	$z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
$L_1 - L_2$	$z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

Il reste à diviser par le bon facteur pour obtenir les deux résultats. ∎

Proposition 1.20 Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

a) *Caractérisation des nombres réels :* $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

b) *Caractérisation des nombres imaginaires purs :* $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Raisonnons par équivalence.

$$z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z - \bar{z}}{2i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \bar{z}$$

La deuxième caractérisation se montre de même. ■

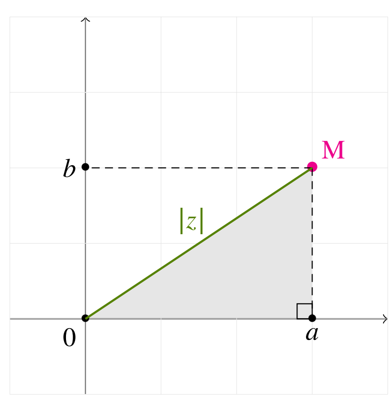
Exemple 1.21 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $z = (2+3i)^n + (2-3i)^n$ est un nombre réel.

1.5 Module d'un nombre complexe

On ne peut pas comparer deux nombres complexes avec la relation $\leqslant$. Par contre, on peut comparer les distances à 0 des points du plan correspondant.

Définition 1.22 Soit $z = a + ib$ un nombre complexe (avec a et b deux réels). On appelle **module** de z, que l'on note $|z|$, le nombre réel *positif* suivant :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Grâce au théorème de Pythagore, on peut comprendre que le module d'un nombre complexe $z = a + ib$ correspond à la longueur du segment entre l'origine du repère O et le point $M(a, b)$:

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

Si $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ sont deux points du plan, alors la quantité $|z_1 - z_2|$ représente la distance M_1M_2.

Ce n'est pas une coïncidence si le **module d'un nombre complexe** s'écrit de la même façon que la **valeur absolue d'un réel**. En effet,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{|a|}_{\text{module}} = |a+0i| = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2} = \underbrace{|a|}_{\text{valeur absolue}}$$

Ainsi, la notion de module *étend* la notion de valeur absolue des réels aux complexes. Cependant, même si les notations sont les mêmes, on veillera à l'oral à bien les distinguer. Ainsi, on ne parlera pas de «valeur absolue d'un complexe».

Exemple 1.23 Calculer les modules suivants.

a) $|1|$

b) $|-1|$

c) $|-i|$

d) $|1+2i|$

e) $|1-i|$

f) $|-2-i|$

Proposition 1.24 — Règles de calculs autour du conjugué. Soient z_1, z_2 deux nombres complexes.

- *Module du produit :* $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ (et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_1^n| = |z_1|^n$)
- *Module du quotient :* si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $\left(\text{et en particulier si } z_2 \neq 0, \left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|}\right)$

Exemple 1.25 Déterminer le module du nombre complexe $Z = \frac{1}{(1-i)^8}$.

Proposition 1.26 — Lien conjugué/module. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

En particulier,

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \text{ avec } |z| = 1, \quad \bar{z} = \frac{1}{z}$$

Démonstration. Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$ (avec a et b deux réels). Alors,

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

De plus, si $z \neq 0$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \times \bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

De plus, si $|z| = 1$, alor s

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{1^2} = \bar{z}$$

∎

Cette relation permet de déterminer la forme algébrique d'un quotient de deux nombres complexes. En effet, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes avec $z_2 \neq 0$, alors,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \times \overline{z_2}}{z_2 \times \overline{z_2}} = \frac{z_1 \times \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

Exemple 1.27 Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $Z = \frac{2+i}{3-4i}$.

Proposition 1.28 Soit $z \in \mathbb{C}$.

a) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

b) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$

c) $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$

d) $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$

Preuve de c). Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec a et b deux nombres réels). On a,

$$\begin{array}{lll} & b^2 \geqslant 0 & \\ \text{donc} & a^2 + b^2 \geqslant a^2 & \\ \text{donc} & \sqrt{a^2+b^2} \geqslant \sqrt{a^2} & \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ croissante sur } [0, +\infty[\\ \text{donc} & \sqrt{a^2+b^2} \geqslant |a| & \text{car pour tout } x \text{ réel, } \sqrt{x^2} = |x| \\ \text{donc} & |z| \geqslant |\mathrm{Re}(z)| & \end{array}$$

■

Exemple 1.29 Soient z_1, z_2 deux nombres complexes. Montrer que,

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$$

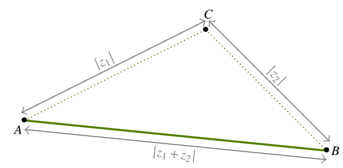
Proposition 1.30 — Inégalité triangulaire. Soient z_1, z_2 deux nombres complexes. On a,

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

De plus, le cas d'égalité est donné par,

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \qquad \Longleftrightarrow \qquad z_2 = 0 \text{ ou } \exists \lambda \geqslant 0,\ z_1 = \lambda z_2$$

Ce théorème traduit le fait que la distance la plus courte entre deux points est la ligne droite : le plus efficace pour aller d'un point A à un point B est d'aller tout droit, sans passer par un troisième point C qui ne serait pas sur la ligne droite.

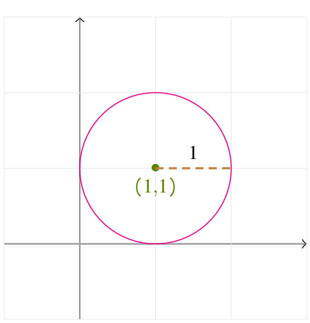


Exemple 1.31 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-2| \leqslant 3$ et $|z-2i| \leqslant 5$. Montrer que

$$|z-(1+i)| \leqslant 4$$

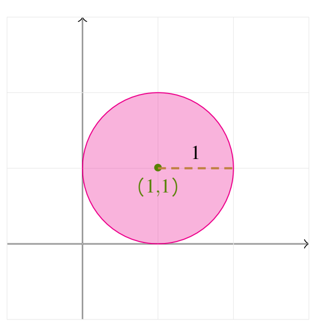
La formulation avec des complexes de la distance entre deux points nous permet de caractériser efficacement certains des objets géométriques.

Proposition 1.32 Soient $R>0$ et $z \in \mathbb{C}$. Notons M l'affixe de z. Alors,
- $M(z)$ appartient au cercle de centre $A(z_A)$ et de rayon R si et seulement si $|z-z_A| = R$;
- $M(z)$ appartient au disque fermé (resp. ouvert) de centre $A(z_A)$ et de rayon R si et seulement si $|z-z_A| \leqslant R$ (resp. $|z-z_A| < R$).



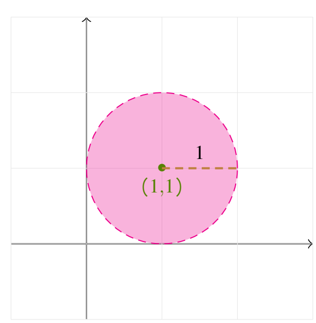
Représentation du cercle de centre $(1,1)$ et de rayon 1

$$\{z \in \mathbb{C} ; |z-(1+i)| = 1\}$$



Représentation du disque fermé de centre $(1,1)$ et de rayon 1

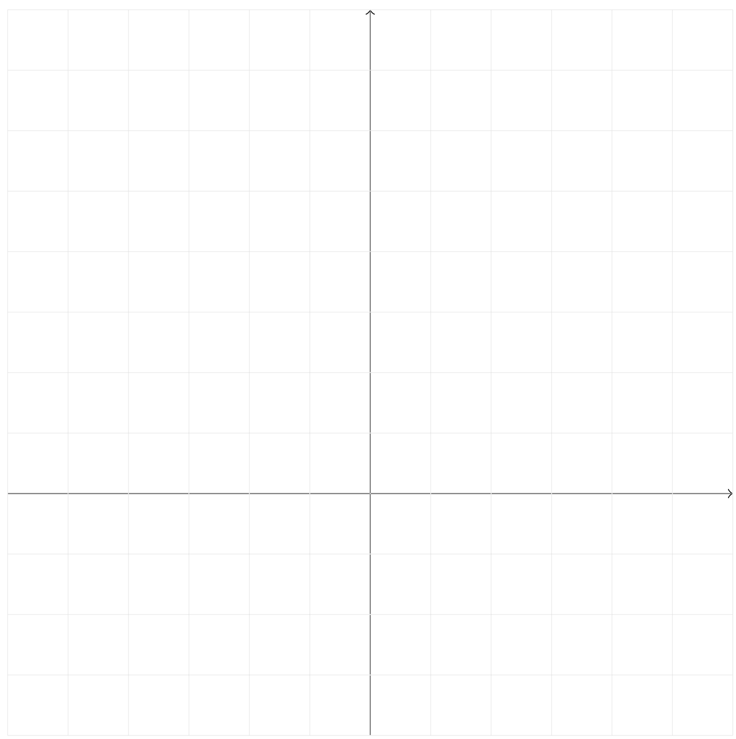
$$\{z \in \mathbb{C} ; |z-(1+i)| \leqslant 1\}$$



Représentation du disque ouvert de centre $(1,1)$ et de rayon 1

$$\{z \in \mathbb{C} ; |z-(1+i)| < 1\}$$

Exemple 1.33 Illustrer graphiquement le résultat de l'Exemple 1.31.



Preuve du cas de l'égalité de l'inégalité triangulaire. Soient z_1, z_2 deux nombres complexes. Montrons que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \qquad \Longleftrightarrow \qquad z_2 = 0 \text{ ou } \exists \lambda \geqslant 0,\ z_1 = \lambda z_2$$

- $\boxed{\Leftarrow}$ Montrons le sens indirect.
  - Si $z_2 = 0$, alors,

$$|z_1 + z_2| = |z_1| = |z_1| + |z_2|$$

  - S'il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $z_1 = \lambda z_2$, alors

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |\lambda z_2 + z_2| && \text{car } z_1 = \lambda z_2 \\ &= (\lambda + 1)|z_2| && \text{car } 1 + \lambda \geqslant 0 \\ &= \lambda |z_2| + |z_2| && \\ &= |\lambda z_2| + |z_2| && \text{car } \lambda \geqslant 0 \\ &= |z_1| + |z_2| && \text{car } z_1 = \lambda z_2 \end{aligned}$$

- $\boxed{\Rightarrow}$ Montrons le sens direct. On suppose que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Montrons que $z_2 = 0$ ou qu"il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $z_1 = \lambda z_2$. En reprenant les inégalités de la preuve de l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 2|\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})| = 2|z_1 \overline{z_2}|$$

  et donc que, $z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$. Soit $z_2 = 0$ et la preuve est terminée, soit $z_2 \neq 0$ et alors, il existe $\lambda = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} \geqslant 0$ tel que

$$\lambda \times z_2 = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} \times z_2 = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} \times z_2 = z_1$$

■

Exemple 1.34 Trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z+i| = |z| + 1$.

Proposition 1.35 — Inégalité triangulaire complète. Soient z_1, z_2 deux nombres complexes. On a,

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

2 Équations algébriques

2.1 Calcul de racines carrées dans $\mathbb{C}$

Définition 2.1 Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Les **racines carrées complexes** de z_0 sont les nombres complexes ω vérifiant

$$\omega^2 = z_0$$

Tout nombre complexe z_0 non nul admet exactement **deux racines carrées** qui sont opposées.

Un nombre réel y_0 admet une **unique racine carrée (réelle)** qui est l'unique nombre *positif* x_0 tel que

$$x_0^2 = y_0$$

Parmi les deux solutions possibles à cette équation (quant elles existent), on sélectionne toujours celle qui est positive. Pour les nombres complexes, la notion de signe n'a pas de sens, on garde donc toutes les valeurs possibles.

Nombre	Racine<u>s</u> carrée<u>s</u> complexes	Racine carrée réelle
1		
4		
-1		

Exemple 2.2 Donner «à l'oeil» <u>les</u> racines carrées complexes des nombres complexes suivants.

Nombre complexes	Racine<u>s</u> carrée<u>s</u> complexes	Justification
-1		
-4		
-2		
1		

De manière générale, il est pas aisé de trouver les racines carrées complexes d'un nombre complexe. On peut utiliser la méthode suivante expliquée sur un exemple.

Exemple 2.3 Déterminer <u>les</u> racines carrées complexes de $8-6i$.

2.2 Factorisation de polynômes

Définition 2.4 On appelle **fonction polynomiale** toute fonction de la forme

$$z \mapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres complexes.

Exemple 2.5 Déterminer si les fonctions suivantes sont polynomiales ou non.

Fonction	Polynomiale ?
$z \mapsto 1 + z + z^2$	
$z \mapsto 1 + \sqrt{z}$	
$z \mapsto 3$	

Définition 2.6 — Factorisation et racines. Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes. On dit qu'un nombre complexe α est une **racine** de P si $P(\alpha) = 0$. Dans ce cas, il existe une autre fonction polynomiale à coefficients complexes Q telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = (z - \alpha)Q(z)$$

Pour trouver les racines d'une fonction polynomiale, on peut trouver une racine évidente, factoriser le polynôme et en déduire toutes les racines.

Exemple 2.7 Déterminer les racines des fonctions polynomiales suivantes.

Fct. poly.	Racine évidente	Factorisation	Racines
$z \mapsto z^2 - 2z$			
$z \mapsto z^2 + z - 6$			
$z \mapsto 2z^2 - 2z - 12$			
$z \mapsto z^2 + 1$			

Si on n'arrive pas à trouver une racine évidente, pour déterminer les racines d'une fonction polynomiale de degré deux, on peut aussi utiliser les formules suivantes.

Proposition 2.8 — Résolution d'une équation de second degré à coefficients complexes. Soient a, b et c des **nombres complexes** avec $a \neq 0$. On considère l'équation du second degré

$$az^2 + bz + c = 0$$

Notons $\Delta = b^2 - 4a \in \mathbb{C}$ le discriminant de cette équation. Soit $\delta \in \mathbb{C}$ <u>une</u> solution de $\delta^2 = \Delta$.

	Solutions (complexes)	Factorisation
$\Delta = 0$	Une unique solution dans $\mathbb{C}$: $z_0 = -\frac{b}{2a}$	$\forall z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$
$\Delta \neq 0$	Deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$	$\forall z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Démonstration. La preuve repose sur la **mise sous forme canonique** du polynôme de second degré :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad az^2+bz+c = a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

- On suppose que $\Delta = 0$. Alors,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad az^2+bz+c = a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$$

  Et donc, comme $a \neq 0$,

$$az^2+bz+c=0 \quad \Longleftrightarrow \quad a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = -\frac{b}{2a}$$

- On suppose que $\Delta \neq 0$. Alors,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] = a\left[z+\frac{b+\delta}{2a}\right]\left[z+\frac{b-\delta}{2a}\right]$$

  Et donc, comme $a \neq 0$,

$$az^2+bz+c=0 \quad \Longleftrightarrow \quad a\left[z+\frac{b+\delta}{2a}\right]\left[z+\frac{b-\delta}{2a}\right]=0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = -\frac{b+\delta}{2a} \text{ ou } z = -\frac{b-\delta}{2a}$$

D'où le résultat. ■

Exemple 2.9 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1=0$.

Exemple 2.10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$.

Proposition 2.11 — Résolution d'une équation de second degré à coefficients réels. Soient a, b et c des **nombres réels** avec $a \neq 0$. On considère l'équation du second degré

$$az^2 + bz + c = 0$$

Notons $\Delta = b^2 - 4a \in \mathbb{R}$ le discriminant de cette équation.

	Solutions	Factorisation
$\Delta > 0$	Deux solutions dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	Une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$	$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$
$\Delta < 0$	Pas de solution dans $\mathbb{R}$	Pas de factorisation dans $\mathbb{R}$
	Deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$	$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Exemple 2.12

1. Résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.

Pour trouver les racines d'une fonction polynomiale de degré deux plus rapidement, on peut aussi utiliser les relations suivantes.

Proposition 2.13 — Relations coefficients-racines. Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (autrement dit, les racines de la fonction polynomiale $z \mapsto az^2 + bz + c$). Alors, on a,

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple 2.14 Déterminer *rapidement* les racines de la fonction polynomiale $x \mapsto x^2 - 5x + 6$.

Exemple 2.15 Déterminer *rapidement* les racines de la fonction polynomiale $z \mapsto 3iz^2 - (9 + 6i)z + 18$.