

TD 23 – Continuité d'une fonction

Étude de la continuité

Exercice 1 – Continuité en un point. Étudier la continuité des fonctions suivantes au point a indiqué :

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $a = 0$

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $a = \frac{2}{3}$

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{-3x+2} & \text{si } x < \frac{2}{3} \\ 3x-2 & \text{si } x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Exercice 2 – Continuité sur un intervalle. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur intervalle de définition :

a) $g: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ \ln(x-1) & \text{si } 1 < x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

b) $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Exercice 3 – Prolongement par continuité. On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$$

- Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .
- Justifier que f est continue sur $\mathcal{D}_f$.
- Déterminer la limite de f en 0.
- Peut-on prolonger la fonction f par continuité en 0 ?

Exercice 4 – Prolongement par continuité. Les fonctions f suivantes définies sur D sont-elles prolongeables par continuité en a ?

- La fonction $f: x \mapsto \frac{x}{2x+|x|}$ en $a = 0$ sur $D = \mathbb{R}^*$
- La fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ en $a = 0$ puis $a = 1$ sur $D =]0, +\infty[\setminus \{1\}$
- La fonction $f: x \mapsto x^x$ en $a = 0$ sur $D =]0, +\infty[$

Exercice 5 – Utilisation de la caractérisation séquentielle. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue en 0 et telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$$

- En déduire que f est constante.

Exercice 6 – Lien entre continuité et convergence d'une suite. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1/2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}$$

- Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 1$.

- Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{4} \times (u_n - 2)$$

- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers une limite finie que l'on notera ℓ .
- Déterminer la valeur de ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Utilisation des théorèmes généraux

Exercice 7 – Théorème des valeurs intermédiaires. On considère la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto e^{3x} + x$$

Montrer que l'élément $1 + e^2$ admet un antécédent par la fonction f et que cet antécédent est compris entre 0 et 1.

Exercice 8 – Théorème des valeurs intermédiaires. On considère la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto e^{-x} - x^2$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 – Théorème des valeurs intermédiaires. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe un réel d vérifiant $f \circ f(d) = d$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f(c) = c$.

Exercice 10 – Théorème des bornes. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall x \in [1, 100], \quad mx \leq e^x \leq Mx$$

- Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ admet un minimum et un maximum qui sont tous les deux strictement positifs.
- Conclure.

Exercice 11 – Donner un exemple de fonction :

- Continue sur $[0, 1[$ mais non bornée.
- Définie sur $[0, 1]$, bornée mais n'atteint pas ses bornes.
- Continue sur $\mathbb{R}_+$, bornée mais n'atteint pas ses bornes.

1 Approfondissement

Exercice 12 –

- Soient a et b deux réels. Montrer que

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

et

$$\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$$

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en a . Montrer que $|f|$ continue en a . La réciproque est-elle vraie ?
- En déduire que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I , les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ le sont aussi.

Exercice 13 – Suites définies de manière implicite. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f_n &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x - nx \end{aligned}$$

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur l'intervalle $] -\infty, \ln(n)]$ et une unique solution v_n sur $[\ln(n), +\infty[$.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.
3. Démontrer que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 3$.
4. Soit $n \geq 3$. Démontrer que $f_{n+1}(u_n) = -u_n$ puis que $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$. En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
5. Montrer que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.
6. Démontrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 14 – Montrer qu'une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 15 – Étude d'une suite définie par récurrence. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f &: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2 + 8}{6} \end{aligned}$$

et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in [0, 2[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
3. Tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$ sur le même schéma.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.
5. Donner le signe de $f(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
6. Montrer que pour tout $x \in [0, 2]$, $f(x) \in [0, 2]$.
7. En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$.
8. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. *On pourra utiliser la question 5.*
9. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ .
10. Montrer que $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ .

Exercice 16 – Existence d'un point fixe. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.

Exercice 17 – D'après Petites Mines. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que l'équation $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$ admet au moins une solution sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ l'équation $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$ admet au moins une solution. *Indication : on pourra commencer par vérifier que*

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = 0$$