TD 23 – Continuité d'une fonction (Correction)

Étude de la continuité

Exercice 1 – Continuité en un point. Étudier la continuité des fonctions suivantes au point a indiqué:

a) $f\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ en $a = 0$

Par composition,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(1).$$

Donc la fonction f n'est $\boxed{\text{pas continue en } 0.}$

b) $h\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{-3x+2} & \text{si } x < \frac{2}{3} \\ 3x-2 & \text{si } x \geqslant \frac{2}{3} \end{cases} \end{array}$ en $a = \frac{2}{3}$

Par composition, et continuité de la racine carrée,

$$\lim_{x \to \frac{2}{3}} h(x) = \sqrt{-3 \times \frac{2}{3} + 2} = 0 = h\left(\frac{2}{3}\right) = 0.$$

Donc la fonction f est $\boxed{\text{continue en } \frac{2}{3}.}$

Exercice 2 – Continuité sur un intervalle. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur intervalle de définition :

a) $$g : \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ \ln(x-1) & \text{si } 1 < x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \end{array}$$

- La fonction g est bien définie et $\boxed{\text{continue sur }]1,2[}$ par composition, car pour tout $x \in]1,2[$, $x-1>0$, $x \mapsto x-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction logarithme est continue sur $]0,+\infty[$.
- La fonction g est $\boxed{\text{continue sur }]2,+\infty[}$ en tant que fonction polynomiale.
- Étudions la continuité de g en 1. Par composition,

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = -\infty \neq g(1).$$

Donc la fonction g n'est $\boxed{\text{pas continue en 1.}}$

- Étudions la continuité de f en 2. Par composition et continuité du logarithme,

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \ln(1) = 0 = g(2) = 0.$$

Donc la fonction g est $\boxed{\text{continue en 2.}}$

b) $$i : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases} \end{array}$$

En utilisant la définition de la valeur absolue, on peut simplifier l'expression de i de la manière suivante :

$$i : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -1 & \text{si } x < -2 \end{cases} \end{array}$$

Donc, on peut montrer que la fonction i est $\boxed{\text{continue sur }]-\infty,-2[\text{ sur }]-2,+\infty[}$ mais n'est $\boxed{\text{pas continue en } -2.}$

Exercice 3 – Prolongement par continuité. On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

La fonction racine carrée étant définie sur $[0,+\infty[$ et la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$, par produit, la fonction f est définie sur $\boxed{\mathscr{D}_f =]0,+\infty[}$.

b) Justifier que f est continue sur $\mathscr{D}_f$.

La fonction racine carrée étant continue sur $[0,+\infty[$ et la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$, par produit, la fonction f est $\boxed{\text{continue sur }]0,+\infty[}$.

c) Déterminer la limite de f en 0.

Par croissances comparées, on a

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0}$$

d) Peut-on prolonger la fonction f par continuité en 0 ?

Comme la fonction f admet une limite finie en 0, elle est $\boxed{\text{prolongeable par continuité}}$. Son prolongement par continuité est donné par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{x}\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 4 – Prolongement par continuité. Les fonctions f suivantes définies sur D sont-elles prolongeables par continuité en a ?

a) La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2x+|x|}$ en $a = 0$ sur $D = \mathbb{R}^*$

En utilisant la définition de la valeur absolue, on peut simplifier l'expression de i de la manière suivante :

$$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{3} \qquad \text{alors que} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$

Donc, la fonction f n'admet pas de limite en 0. Elle n'est donc $\boxed{\text{pas prolongeable par continuité en 0.}}$

b) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ en $a = 0$ puis $a = 1$ sur $D =]0, +\infty[\setminus \{1\}$

On a,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$$

Donc, la fonction f admet une limite finie en 0. Elle est donc $\boxed{\text{prolongeable par continuité en 0.}}$

Cependant,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

Elle n'est donc $\boxed{\text{pas prolongeable par continuité en 1.}}$

c) La fonction $f : x \mapsto x^x$ en $a = 0$ sur $D =]0, +\infty[$

On peut commencer par remarquer que

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = x^x = \exp(x \ln(x))$$

Or, par croissances comparées,

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$$

et donc par composée,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Donc, la fonction f admet une limite finie en 0. Elle est donc $\boxed{\text{prolongeable par continuité en 0.}}$

Exercice 5 – Utilisation de la caractérisation séquentielle. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ continue en 0 et telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$$

   Par récurrence.

2. En déduire que f est constante.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on sait que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$$
   En passant à la limite $[n \to +\infty]$, comme la fonction f est continue en 0, on obtient :
$$f(0) = f(x)$$
   Ainsi, on a démontré que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f(0)$$
   La fonction f est $\boxed{\text{constante.}}$

Exercice 6 – Lien entre continuité et convergence d'une suite. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1/2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$.
2. Montrer que,
$$\forall n \ \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{4} \times (u_n - 2)$$
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers une limite finie que l'on notera ℓ.
5. Déterminer la valeur de ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Utilisation des théorèmes généraux

Exercice 7 – Théorème des valeurs intermédiaires. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{3x} + x \end{array}$$

Montrer que l'élément $1 + e^2$ admet un antécédent par la fonction f et que cet antécédent est compris entre 0 et 1.

On cherche à montrer que l'élément $1+e^2$ admet un antécédent par la fonction f qui est compris entre 0 et 1, c'est-à-dire, on cherche à montrer que

$$\exists x \in [0,1], \quad f(x) = 1 + e^2.$$

Geste invisible : On veut prendre $a = 0$, $b = 1$ et $k = 1 + e^2$ dans le TVI (v2). Tout d'abord, en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier,

① la fonction f est **continue** sur $[0,1]$.

Par ailleurs, $f(0) = 1$ et $f(1) = 1 + e^3$. Donc, comme $1 + e^2 \in [f(0), f(1)]$, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = 1 + e^2$. Autrement dit, l'élément $\boxed{1 + e^2 \text{ admet un antécédent}}$ par la fonction f qui est compris entre 0 et 1.

Exercice 8 – Théorème des valeurs intermédiaires. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x} - x^2 \end{array}$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Geste invisible : On veut prendre $a = 0$ et $b = 1$ dans le TVI. On a :

① la fonction f est **continue** sur $[0,1]$, comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$,
② $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = e^{-1} - 1 < 0$

Donc, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, la fonction f $\boxed{\text{s'annule au moins une fois}}$ sur $[0,1]$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 – Théorème des valeurs intermédiaires. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe un réel d vérifiant $(f \circ f)(d) = d$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f(c) = c$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe un réel d vérifiant $(f \circ f)(d) = d$. Si $f(d) = d$, alors l'exercice est fini. Supposons donc que $f(d) \neq d$. Supposons par exemple que $f(d) < d$ (le cas $f(d) > d$ se traite de même). On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x) - x$$

① La fonction g est **continue** sur $\mathbb{R}$ car f l'est et car $x \mapsto x$ l'est.

② On a

$$g(d) = f(d) - d < 0$$

et, comme $(f \circ f)(d) = d$, on a aussi

$$g(f(d)) = f(f(d)) - f(d) = d - f(d) > 0$$

Donc, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, la fonction g $\boxed{\text{s'annule au moins une fois}}$ sur $[f(d), d]$ et donc sur $\mathbb{R}$:

$$\exists c \in \mathbb{R}, \qquad g(c) = 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\exists c \in \mathbb{R}, \qquad f(c) = c}$$

Exercice 10 – Théorème des bornes. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall x \in [1,100], \qquad mx \leq \mathrm{e}^x \leq Mx$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ admet un minimum et un maximum qui sont tous les deux strictement positifs.
2. Conclure.

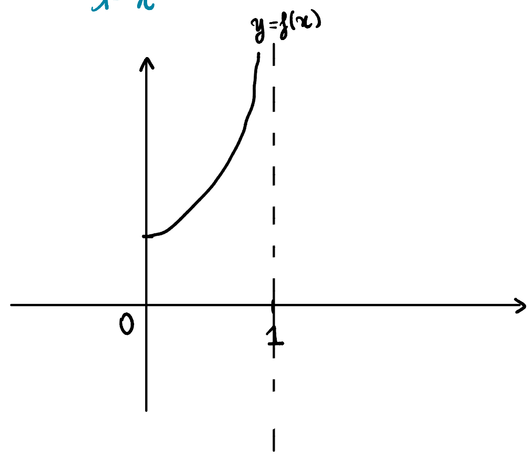
Posons $f : [1,100] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [1,100], \quad f(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Alors f est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas **et** $[1,100]$ **est un segment**. Donc f est bornée et atteint ses bornes. Notons alors $m = \min\limits_{x\in[1,100]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[1,100]} f(x)$. Par définition d'un minimum, il existe $x_0 \in [1,100]$ tel que $m = f(x_0) > 0$. De même, on a $M > 0$. et puisque $\forall x \in [1,100], \quad m \leq f(x) \leq M$, on a

$$\boxed{\forall x \in [1,100], \quad mx \leq e^x \leq Mx}$$

Exercice 11 – Donner un exemple de fonction :

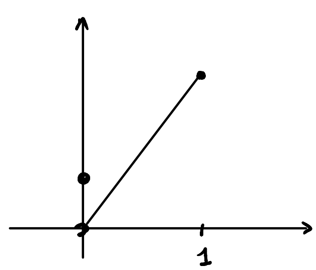
1. Continue sur $[0,1[$ mais non bornée.
2. Définie sur $[0,1]$, bornée mais n'atteint pas ses bornes.
3. Continue sur $\mathbb{R}_+$, bornée mais n'atteint pas ses bornes.

1. $f : \begin{array}{l} [0,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{1-x} \end{array}$ continue sur $[0,1[$ mais non majorée



2. $f : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

Bornée : $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$ mais sa borne inférieure qui vaut 0 qui n'est pas atteinte



3. $f : \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan(x) \end{array}$

Bornée : $\forall x \geq 0$, $0 \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2}$ mais sa borne supérieure qui vaut $\frac{\pi}{2}$ n'est pas atteinte.

1 Approfondissement

Exercice 12 –

1. Soient a et b deux réels. Montrer que

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$$

et

$$\min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$$

On raisonne par **disjonction de cas**.

- Si $a=b$ alors $|a-b|=0$ et

$$\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = a = \max(a,b)$$

- Si $a<b$ alors $|a-b|=b-a$ et

$$\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = b = \max(a,b)$$

- De même si $a>b$.

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en a. Montrer que $|f|$ continue en a. La réciproque est-elle vraie ?

Si f est continue en a, comme la fonction valeur absolue est continue en $f(a)$ (elle est continue sur $\mathbb{R}$) par composition, $|f|$ est continue en a.
Attention, la réciproque n'est pas vraie: Si on considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si} x = 0 \end{cases}$$

, la fonction $|f|$ est continue en 0 (c'est la fonction constante égal à 1) pourtant la fonction f n'est pas continue en 0 (car $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq f(0)$).

3. En déduire que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, les fonctions $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ le sont aussi.

Par opérations grâce à la formule de la Question 1.

Exercice 13 – Suites définies de manière implicite. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On considère la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x - nx \end{array}$$

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur l'intervalle $]-\infty, \ln(n)]$ et une unique solution v_n sur $[\ln(n), +\infty[$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
   - L'ensemble $]-\infty, \ln(n)]$ est un intervalle.
   - La fonction f_n est continue sur cet intervalle.
   - La fonction f_n est dérivable sur cet intervalle et

   $$\forall x \in]-\infty, \ln(n)], \qquad f'(x) = \mathrm{e}^x - n < 0$$

   Donc la fonction f_n est strictement décroissante sur cet intervalle.

   D'après le **théorème de la bijection**, la fonction f_n est bijective de $]-\infty, \ln(n)]$ sur $[n(1 - \ln(n)], +\infty[$:

   $$\forall y \in [n(1-\ln(n)], +\infty[, \exists! x \in]-\infty, \ln(n)], y = f_n(x)$$

   En particulier, pour $y = 0[n(1-\ln(n)], +\infty[$,

   $$\boxed{\exists! u_n \in]-\infty, \ln(n)], 0 = f_n(x_n)}$$

   On montre de même l'existence de v_n.

2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$.

   Par construction,

   $$\forall n \ \geq 3, \qquad v_n \in [\ln(n), +\infty[$$

   c'est-à-dire

   $$\forall n \ \geq 3, \qquad v_n \geq \ln(n)$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$. Donc, par minoration,

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$$

3. Démontrer que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 3$.

   Par construction, la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ vérifie

   $$\forall n \geq 3, \qquad f_n(u_n) = 0$$

   c'est-à-dire

   $$\forall n \geq 3, \qquad nu_n = \mathrm{e}^{u_n} \geq 0$$

   On en déduit que

   $$\boxed{\forall n \geq 3, \qquad u_n \geq 0}$$

4. Soit $n \geq 3$. Démontrer que $f_{n+1}(u_n) = -u_n$ puis que $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$. En déduire que $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

   Soit $n \geq 3$. On a par construction, $f_n(u_n) = 0$ et donc,

   $$\mathrm{e}^{u_n} = nu_n$$

   Ainsi,

   $$\boxed{f_{n+1}(u_n)} = \mathrm{e}^{u_n} - (n+1)u_n = nu_n - (n+1)u_n \boxed{= -u_n}$$

   De plus, par construction,

   $$f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$$

Comme $u_n \geq 0$ d'après la question précédente, on en déduit que

$$f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$$

Or la fonction f_{n+1} est décroissante sur $]-\infty, \ln(n+1)]$ et les deux termes u_n et u_{n+1} sont dans cet intervalle, donc on en déduit que

$$u_n \geq u_{n+1}$$

La suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est $\boxed{\text{décroissante.}}$

5. Montrer que $(u_n)_{n\geq 3}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.

La suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est minorée par 0 et décroissante. D'après le **théorème de la limite monotone**, la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ $\boxed{\text{converge}}$ vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$. Or

$$\forall n \geq 3, \qquad u_n \geq 0$$

donc par passage à la limite,

$$\boxed{\ell \geq 0}$$

6. Démontrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Par construction, la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ vérifie

$$\forall n \geq 3, \qquad f_n(u_n) = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq 3, \qquad nu_n = \mathrm{e}^{u_n} \geq 0$$

On sait que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$. Supposons que $\ell > 0$. Alors en passant à la limite, on aurait

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$$

mais aussi

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}u_n = \mathrm{e}^{\ell}$$

Ce qui est en contradiction avec l'égalité plus haut. Donc $\ell = 0$ et la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ $\boxed{\text{converge vers 0.}}$

Exercice 14 – Montrer qu'une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Soit f une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Pour se simplifier, supposons que sa période vaut 1.

- Comme la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, d'après le théorème des bornes, elle est bornée :

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in [0,1], \qquad m \leq f(x) \leq M$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ ($k = \lfloor x \rfloor$) tel que $x - k \in [0,1]$ et

$$f(x) = f(x-k+k) = f(x-k+1\times k) = f(x-k)$$

  par 1-périodicité de la fonction f. Or, comme $x-k \in [0,1]$, on a

$$m \leq f(x-k) \leq M$$

  c'est-à-dire

$$m \leq f(x) \leq M$$

Ainsi, on a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad m \leq f(x) \leq M$$

La fonction f est $\boxed{\text{bornée.}}$

Exercice 15 – Étude d'une suite définie par récurrence. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2+8}{6} \end{array}$$

et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in [0,2[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   Fonction polynomiale donc $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}.}$

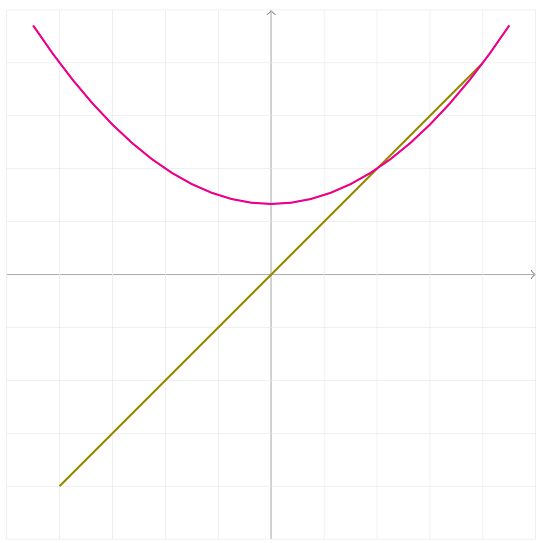
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = \frac{x}{3} \geq 0$$

   Donc la fonction f est $\boxed{\text{croissante sur } \mathbb{R}_+.}$

3. Tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$ sur le même schéma.



4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a,

   $$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{x^2+8}{6} = x \\ &\iff x^2 - 6x + 8 = 0 \\ &\iff \boxed{x = 4 \text{ ou } x = 2} \end{aligned}$$

5. Donner le signe de $f(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = \frac{x^2-6x+8}{6}$. On en déduit le tableau de signe suivant.

x	0		2		4		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

6. Montrer que pour tout $x \in [0,2]$, $f(x) \in [0,2]$.

   Soit $x \in [0,2]$. On a,

$$\begin{array}{rll} & 0 \leq x \leq 2 & \\ \text{donc} & 0 \leq x^2 \leq 4 & \text{car } x \mapsto x^2 \text{ croissante sur } [0,+\infty[\\ \text{donc} & 8 \leq x^2+8 \leq 12 & \\ \text{donc} & \dfrac{8}{6} \leq f(x) \leq 2 & \\ \text{en particulier} & \boxed{0 \leq f(x) \leq 2} & \end{array}$$

7. En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,2]$.
8. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. *On pourra utiliser la question 5.*

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

   Or, $u_n \in [0,2]$ et pour tout $x \in [0,2]$, $f(x) - x \geq 0$. Donc,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$$

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\boxed{\text{croissante.}}$
9. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2. Donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers un certain } \ell \in \mathbb{R}.}$
10. Montrer que $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

   On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

   Or, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc en passant à la limite, on a

$$\ell = f(\ell)$$

   donc (cf Question précédente),

$$\ell = 2 \qquad \text{ou} \qquad \ell = 4$$

   Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_n \leq 2$$

   Donc,

$$0 \leq \ell \leq 2$$

   Ainsi, $\ell = 2$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge vers 2.}}$

Exercice 16 – Existence d'un point fixe. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

Comme f est à valeurs dans $[0,1]$, on sait que

$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 \leq f(x) \leq 1$$

On définit la fonction g par

$$\forall x \in [0,1], \qquad g(x) = f(x) - x$$

① La fonction g est **continue** sur $[0,1]$ car f l'est et car $x \mapsto x$ l'est.

② On a

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$$

et, on a aussi

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

Donc, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, la fonction g $\boxed{\text{s'annule au moins une fois}}$ sur $[0,1]$:

$$\exists c \in [0,1], \qquad g(c) = 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\exists c \in [0,1], \qquad f(c) = c}$$

Exercice 17 – *D'après Petites Mines*

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que l'équation $f\left(x+\frac{1}{2}\right) = f(x)$ admet au moins une solution dans $[0, \frac{1}{2}]$.

   Si $f(\frac{1}{2}) = f(0)$ alors l'équation admet au moins 0 comme solution. Donc supposons que $f(\frac{1}{2}) \neq f(0)$, et même que $f(\frac{1}{2}) > f(0)$ (l'autre cas se traite de même). On considère la fonction g définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par

   $$\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \qquad g(x) = f\left(x+\frac{1}{2}\right) - f(x)$$

   ① La fonction g est **continue** sur $[0, \frac{1}{2}]$ par opérations

   ② On a
   $$g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = f(0) - f(\frac{1}{2}) < 0$$
   et, on a aussi
   $$g(0) = f(\frac{1}{2}) - f(0) > 0$$

   Donc, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, la fonction g s'annule au moins une fois sur $[0, \frac{1}{2}]$:

   $$\exists c \in [0, \frac{1}{2}], \qquad g(c) = 0$$

   c'est-à-dire

   $$\boxed{\exists c \in [0, \frac{1}{2}], \qquad f(c+\frac{1}{2}) = f(c)}$$

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ l'équation $f\left(x+\frac{1}{n}\right) = f(x)$ admet au moins une solution. *Indication : on pourra commencer par vérifier que,*

   $$\forall n \geq 2, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = 0$$

   .

   Soit $n \geq 2$. On peut commencer par remarquer que, grâce à un télescopage,

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = 0 = f(1) - f(0) = 0$$

   Deux cas sont possibles.

   - Soit que tous les termes de la somme valent 0 :

     $$\forall k = 0, \ldots, n-1, \qquad f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$$

     et en particulier pour $k = 0$,
     $$f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) = 0$$
     et l'équation $f\left(x+\frac{1}{n}\right) = f(x)$ admet au moins une solution.
   - Soit au moins deux termes de la somme sont de signe contraire :

     $$\exists k_1, k_2, \quad f\left(\frac{k_1+1}{n}\right) - f\left(\frac{k_1}{n}\right) < 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{k_2+1}{n}\right) - f\left(\frac{k_2}{n}\right) > 0$$

     c'est-à-dire, en posant $x_1 = k_1/n$ et $x_2 = k_2/n$:

     $$f\left(x_1+\frac{1}{n}\right) - f(x_1) < 0 \quad \text{et} \quad f\left(x_2+\frac{1}{n}\right) - f(x_2) > 0$$

On considère la fonction g définie sur $[0,1-\frac{1}{n}]$ par

$$\forall x \in [0,1-\frac{1}{n}], \qquad g(x) = f\left(x+\frac{1}{2}\right) - f(x)$$

① La fonction g est **continue** sur $[0,1-\frac{1}{n}]$ par opérations
② On a $g(x_1) < 0$ et $g(x_2) > 0$.

Donc, en appliquant le **théorème des valeurs intermédiaires**, la fonction g s'annule au moins une fois sur $[0,1-\frac{1}{n}]$:

$$\exists c \in [0,\frac{1}{2}], \qquad g(c) = 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\exists c \in [0,\frac{1}{2}], \qquad f(c+\frac{1}{n}) = f(c)}$$