

COLLES 21 & 22 - Du 16/03 au 20/03 & du 23/03 au 27/03

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours (voir page 2).

Chapitre 21 - Polynômes

- Notion de polynôme à une indéterminée, notation $\mathbb{K}[X]$
- Unicité d'un polynôme (identification des coefficients)
- Opérations sur les polynômes (multiplication par un scalaire, somme, produit, puissance, composée)
- Deux formules : binôme de Newton et factorisation de $P^n - Q^n$ par $P - Q$
- Degré d'un polynôme, notation $\mathbb{K}_n[X]$, comportement du degré vis-à-vis des opérations (somme, produit)
- Évaluation en un point, fonction polynomiale associée
- Dérivée d'un polynôme, dérivées successives, comportement de la dérivée vis-à-vis du degré, formule de Leibniz, formule de Taylor polynomiale
- Relation de divisibilité entre deux polynômes, division euclidienne
- Racine d'un polynôme, théorème de factorisation, multiplicité d'une racine, lien entre le nombre de racines et le degré
- Polynôme scindé, scindé simple, théorème de d'Alembert Gauss, relation coefficients-racines
- Polynômes irréductibles, factorisation dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}$
- Décomposition en éléments simples

Chapitre 22 - Arithmétique des entiers

- Relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$, diverses propriétés de cette relation
- Division euclidienne pour des entiers naturels
- Notion de PGCD, calcul du PGCD avec l'algorithme d'Euclide, entiers premiers entre eux
- Notion de PPCM
- Nombre premiers, décomposition en facteurs premiers, lien avec le PGCD/PPCM

Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice de cours seront demandés parmi les suivants. La question de cours sera notée sur cinq points, et de même pour l'exercice de cours, soit un total de **10 points** (sur les 20 au total). Néanmoins, tout énoncé du cours pourra faire l'objet d'une question de cours, à tout moment de la colle.

Un énoncé :

- ☐ Donner la formule du binôme de Newton et la formule de factorisation de $P^n - Q^n$ par $P - Q$ (Chap 21 - Prop 1.10 et 1.12)
 - ☐ Donner le théorème sur la division euclidienne (Chap 21 - Prop 2.5)
 - ☐ Donner les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$ et ceux irréductibles dans $\mathbb{R}$ (Chap 21 - Prop 4.4 et 4.5)
-
- ☐ Définition de a divise b (pour a et b deux entiers) (Chap 22 - Definition 1.1)
 - ☐ Définition du PGCD de deux nombres (Chap 22 - Definition 2.1)
 - ☐ Définition d'un nombre premier (Chap 22 - Definition 3.1)

Un exercice :

- ☐ Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ à l'aide du polynôme $P = (X + 1)^n$. (Chap 21 - Exemple 1.35)
 - ☐ Factoriser le polynôme $P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$ (Chap 21 - Exemple 4.8)
 - ☐ Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{X^4 + 1}{X^3 - X}$. (Chap 21 - Exemple 5.2)
-
- ☐ Calculer le PGCD de 216 et 126 à l'aide de l'algorithme d'Euclide. (Chap 22 - Exemple 2.4)
 - ☐ Déterminer l'ensemble des diviseurs de 45 à l'aide de sa décomposition en facteurs premiers (Chap 22 - Exemple 3.10)
 - ☐ Déterminer la décomposition en facteurs premiers de 147 et 1575 et en déduire le PGCD et le PPCM de 147 et 1575. (Chap 22 - Exemples 3.8 et 3.12)