

24. Espaces vectoriels

De nombreux problèmes de mathématiques ou de physique vérifient la propriété suivante : si u et v sont deux solutions d'un problème alors $u + v$ est aussi solution de ce problème, ainsi que ku , k étant un nombre réel ou complexe. Nous nous intéressons ici à ces problèmes dit *linéaires*, souvent plus faciles à résoudre que les problèmes plus généraux, dits *non linéaires*. Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 Premières définitions

Les mathématiciens ont introduit la structure d'espace vectoriel, hermétique au premier abord, car ils ont remarqué que cette structure est omniprésente en mathématiques. Ainsi, en mener l'étude systématique s'est imposée.

Définition 1.1 On appelle **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** , ou **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel**, tout triplet $(E, +, \cdot)$ où E est un ensemble, $+$ et $\cdot$ deux lois (ou opérations) vérifiant les propriétés suivantes :

- **La loi d'addition interne $+$:**

- (associativité de $+$) pour tout $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3$, $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- (commutativité de $+$) pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- (neutralité de $+$) il existe un élément noté $\vec{0}_E$ ou $\vec{0}$, tel que

$$\forall \vec{u} \in E, \quad \vec{u} + \vec{0}_E = \vec{0}_E + \vec{u}$$

- (opposé pour $+$) tout élément $\vec{u} \in E$, il existe un élément de E , noté $-\vec{u}$ et nommé opposé de $\vec{u}$ tel que

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}_E$$

- **La loi de multiplication externe $\cdot$:**

- (neutralité mixte) pour tout $\vec{x} \in E$, $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.
- (distributivité mixte) pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$,
- (distributivité mixte) pour tout $\vec{x} \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$,
- (associativité mixte) pour tout $\vec{x} \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})$,

Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$, qui agissent par l'intermédiaire de la loi externe $\cdot$ sur ceux de E , des **scalaires**. La loi $+$ est appelée **addition** et la loi $\cdot$ **multiplication** par un scalaire.

On peut évidemment s'interroger sur l'origine de la terminologie d'« espace vectoriel » et de « vecteurs » dans un cadre aussi abstrait. La réponse étant que les règles de la définition précédentes sont exactement celles classiquement vérifiées par les vecteurs usuels du plan et de l'espace. Dorénavant, les vecteurs pourront désigner des objets aussi divers que des matrices, des fonctions ou des suites, que l'on pourra ainsi s'efforcer de visualiser géométriquement.

Les règles que nous venons de définir sont celles que l'on connaît déjà sur les vecteurs du plan et de l'espace : en considérant deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, on peut :

- Sommer ces vecteurs :

$$\vec{x} + \vec{y} \quad (\text{loi d'addition } + \text{ interne})$$

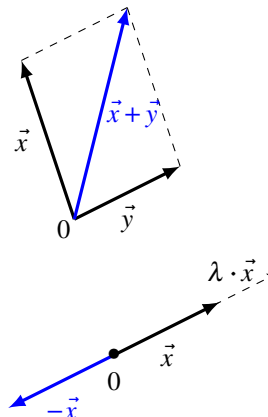
- Multiplier $\vec{x}$ par un scalaire λ :

$$\lambda \cdot \vec{x} \quad (\text{loi de multiplication } \cdot \text{ externe})$$

- Faire la différence de ces vecteurs :

$$\vec{x} - \vec{y}$$

- Par contre, la multiplication de deux vecteurs n'est pas définie.



1.2 Exemple d'espaces vectoriels

Nous donnons des exemples fondamentaux de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels $(E, +, \cdot)$, à connaître par cœur.

	Forme des vecteurs	Lois $+$ et $\cdot$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$	Vecteur nul
$\mathbb{R}$	$\vec{x} = x$ et $\vec{y} = y$	$\vec{x} + \vec{y} = x + y$ $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \times x$	$\vec{0}_{\mathbb{R}} = 0$
$\mathbb{R}^n$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$	$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ $\lambda \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$	$\vec{0}_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$	$A + B = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$ $\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$	$\vec{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$K[X]$	$P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ $Q = \sum_{i=0}^m b_i X^i$	$P + Q = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) X^i$ $\lambda \cdot P = \sum_{i=0}^n (\lambda a_i) X^i$	$\vec{0}_{K[X]} = 0$
$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\lambda \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$\vec{0}_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$
$\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$	f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$	$f + g : I \longrightarrow \mathbb{K} ; x \longmapsto f(x) + g(x)$ $\lambda \cdot f : I \rightarrow \mathbb{K} ; x \mapsto \lambda f(x)$	$\vec{0}_{\mathcal{F}(I, \mathbb{K})} = 0_{I \rightarrow \mathbb{K}}$

1.3 Règles de calcul dans les espaces vectoriels

Exemple 1.2 Compléter le tableau suivant.

Espace ambiant	Opération	Résultat
	$(-1, \frac{1}{3}) + (1, 1)$	
	$2 \cdot (-1, \frac{1}{3})$	
	$(-1) \cdot (1, 0, 2) + (4, 2, -2)$	
	$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
	$2f + g$	

En géométrie, il est d'usage de noter les vecteurs $\vec{x}$ avec une flèche. En revanche, on utilise usuellement la notation plus légère sans flèche pour les vecteurs d'un espace vectoriel quelconque. Il faut alors être vigilant à ne pas confondre vecteurs et scalaires.

Proposition 1.3 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda \cdot x = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad x = 0_E$$

2. Pour tout $x \in E$, $-\vec{x} = -1 \cdot \vec{x}$.

1.4 Combinaison linéaire

Définition 1.4 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ des éléments de E . Soit $\vec{x} \in E$. On dit que $\vec{x}$ est **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ si $\vec{x}$ s'écrit sous la forme

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

En particulier,

- Une combinaison linéaire d'un seul vecteur $\vec{x}$ est un vecteur de la forme $\lambda \cdot \vec{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$
- Une combinaison linéaire de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ est un vecteur de la forme $\lambda \cdot \vec{x} + \mu \vec{y}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Illustration graphique dans $\mathbb{R}^2$.

De manière générale, lorsque l'on cherche à exprimer u comme combinaison linéaire de deux vecteurs (ou plus) u_1 et u_2 , on rencontre nécessairement l'une des trois situations suivantes.

- Il n'est *pas possible* d'exprimer u comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 .
- Il y a une *unique façon* d'exprimer u comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 .
- Il y a une *infinité de façons* d'exprimer u comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 .

Exemple 1.5

1. Montrer que le vecteur $u = (0, -1, 3)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$ et $u_2 = (2, 1, -1)$.
2. Montrer que le vecteur $(2, 3)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$.
3. Montrer que $(0, -1, 3)$ ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Exemple 1.6

1. Montrer que M peut s'écrire comme une combinaison linéaire de M_1 , M_2 et M_3 où

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que le polynôme $P = X^2 + 2X$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des polynômes $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X$ et $P_3 = 2$.

Définition 1.7 Soit $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ des vecteurs de E . L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ est noté $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$:

$$\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \{ \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \}$$

Autrement dit,

$$\vec{x} \in \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n \iff \vec{x} \text{ est c.l. des } \vec{x}_i$$

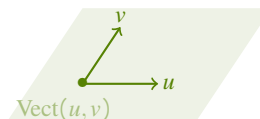
L'ensemble $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est aussi le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$:

$$\text{si pour tout } i = 1, \dots, n, \vec{x}_i \in F \quad \text{alors} \quad \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \subset F$$

? Pour mieux visualiser cette définition, regardons des exemples dans $\mathbb{R}^2$.



Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur ne permettent de «parcourir seulement qu'une droite»



Les combinaisons linéaires de deux vecteurs non colinéaires permettent de «parcourir tout le plan».

Exemple 1.8 Soient $u_1 = (2, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

1. Montrer que $v = (5, 1, 1) \in F$.
2. Montrer que $w = (1, 1, 1) \notin F$.

Exemple 1.9 Soient $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{-x}$, $f_3 : x \mapsto \cos(x)$ et $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$. Soit $f : x \mapsto \text{ch}(x)$. Montrons que $f \in F$.

Exemple 1.10 Déterminer si $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exemple 1.11 Compléter le tableau suivant.

	Vect	Combinaisons linéaires	
$\mathbb{R}^2$	$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$		
$\mathbb{R}^2$	$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$		
$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right)$		

2 Sous-espaces vectoriel

Dans cette partie, $(E, +, \cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

2.1 Définition

Définition 2.1 Soit F une partie non vide de E . On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois $+$ et $\cdot$ définies sur E .

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E , parfois dits *triviaux*.

Le résultat suivant est celui que l'on utilise majoritairement pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E . Il évite de vérifier les nombreux points de la définition d'un espace vectoriel.

Proposition 2.2 — Caractérisation d'un sev. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

	Axiome	Reformulation
①	F est un sous-ensemble de E	$F \subset E$
②	L' élément neutre appartient à F	$\vec{0}_E \in F$
③	F est stable par combinaison linéaire	$\forall (u, v) \in F, \forall (a, b) \in \mathbb{K}, au + bv \in F.$

Voici plusieurs exemples de sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels de référence.

	Sous-espace vectoriel F
$\mathbb{R}^2$	• Toute droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0,0)$: $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$
$\mathbb{R}^3$	• Tout plan de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$: $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$
$\mathbb{R}^n$	• $\mathcal{H}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$
$\mathbb{R}[X]$	• L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	• L'ensemble des matrices diagonales $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ • L'ensemble des matrices triangulaires supérieures $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ • L'ensemble des matrices triangulaires inférieures $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ • L'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ • L'ensemble des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$
$\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$	• L'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ • Mais aussi, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ (fonctions dérivables) • L'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ • L'ensemble des solutions de $y' + a(x)y = 0$.
$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$	• L'ensemble des suites géométriques de raison q • L'ensemble des suites linéaires récurrentes d'ordre 2 $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ • L'ensemble des suites réelles convergentes

Exemple 2.3 Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. *Faire une illustration graphique.*

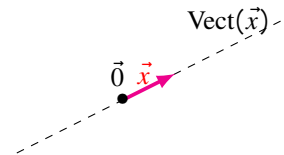
Exemple 2.4 Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 2.5 Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Faire une illustration graphique.

Exemple 2.6 Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Faire une illustration graphique.

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Proposition 2.7 Soit $\vec{u}$ un vecteur de E . L'ensemble $\text{Vect}(\vec{u}) = \{\lambda \cdot \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E , appelé la **droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$** .



Démonstration.

- ❶ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \vec{u} \in E$ donc $\text{Vect}(\vec{u}) \subset E$.
- ❷ $\vec{0}_E = 0 \cdot \vec{u} \in \text{Vect}(\vec{u})$.
- ❸ Soient $(\vec{x}, \vec{y})$ des éléments de $\text{Vect}(\vec{u})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme $\vec{x} \in \text{Vect}(\vec{u})$, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{u}$. Et comme $\vec{y} \in \text{Vect}(\vec{u})$, il existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{y} = \lambda_2 \cdot \vec{u}$. Donc

$$\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} = \lambda \cdot (\lambda_1 \cdot \vec{u}) + \mu \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{u}) = (\lambda \lambda_1) \cdot \vec{u} + (\mu \lambda_2) \cdot \vec{u} = \underbrace{(\lambda \lambda_1 + \mu \lambda_2)}_{\in \mathbb{K}} \cdot \vec{u}$$

Donc $\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in \text{Vect}(\vec{u})$.

De ces trois points, on en déduit que $\text{Vect}(\vec{u})$ est un sous-espace vectoriel de E . ■

Ainsi, si on arrive à exprimer un ensemble «comme un vect», on obtient directement le fait qu'il est un sous-espace vectoriel sans avoir besoin de vérifier les trois points précédents.

Exemple 2.8 Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$. Écrire F «comme un vect». *Faire une illustration graphique.*

Exemple 2.9 Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f' + 2f = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Le résultat précédent se généralise à une famille finie de plusieurs vecteurs.

Proposition 2.10 Soient $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille finie de vecteurs de E . L'ensemble $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé **sous-espace vectoriel engendré par la famille** $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

Exemple 2.11 Soit $F = \{(a, b, a + b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.12 Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c \\ c & a-b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On peut «manipuler les vect» de la manière suivante.

Proposition 2.13 Soient $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille d'éléments de E .

On ne modifie pas l'espace vectoriel $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ en effectuant les opérations suivantes :

- éliminer les vecteurs nuls $\vec{0}_E$ de la famille,
- éliminer un des vecteurs de la famille s'il est égal à un autre ou s'il est combinaison linéaire des autres vecteurs,
- permuter des vecteurs :

$$\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) = \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n)$$

- multiplier un vecteur par un scalaire non nul :

$$\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) = \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \lambda \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n)$$

- ajouter à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille :

$$\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) = \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j + \lambda \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n)$$

Ces manipulations permettent d'éliminer les vecteurs redondants dans un Vect.

Exemple 2.14 Simplifier au maximum le Vect suivant :

$$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Exemple 2.15 Montrer que $\text{Vect}(1 + X, -1 + 2X) = \text{Vect}(1, X)$

Exemple 2.16 Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1 + X + X^2, X + X^2, X - X^2)$.

3 Forme paramétrique et conditionnelle

3.1 D'un système d'équations à des paramètres

Exemple 3.1 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) \text{ et } P'(1) = 0\}$. Écrire F sous forme paramétrique.

3.2 D'un paramètre à des systèmes d'équations

Exemple 3.2 Soit $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (2, 3, 1))$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Trouver un système d'équations définissant F .

4 Famille génératrice

Définition 4.1 Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ des vecteurs de E . On dit que la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est une **famille génératrice de E** si

$$E = \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

Autrement dit, tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$.

La première méthode pour déterminer une famille génératrice est d'écrire l'espace comme un vect.

Exemple 4.2 Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ telle que F est l'espace vectoriel engendré par cette famille. *Faire une illustration graphique.*

Exemple 4.3 Donner une famille génératrice de $G = \{(a+b)X^2 - (b-c)X + a + 2c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

La deuxième méthode pour démontrer qu'une famille donnée est génératrice d'un espace est de montrer que n'importe quel élément peut s'écrire comme une combinaison linéaire de cette famille.

Exemple 4.4 Soient $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (2, 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que (e_1, e_2) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. *Faire une illustration graphique.*

Exemple 4.5 Donner une famille génératrice pour chacun des ensembles suivants.

Espace	Famille génératrice	Décomposition
$\mathbb{R}^2$		
$\mathbb{R}^3$		
$\mathbb{K}_2[X]$		
$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$		

5 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

5.1 Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Définition 5.1 Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors l'intersection $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Preuve pour deux sev. Traitons le cas de deux sous-espaces vectoriels F et G . Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E

- ❶ $F \subset E$ et $G \subset E$ donc $F \cap G \subset E$.
- ❷ $\vec{0}_E \in F$ et $\vec{0}_E \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E . Donc $\vec{0}_E \in F \cap G$.
- ❸ Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de $F \cap G$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in F$. F étant un sous-espace vectoriel de E , d'après la caractérisation, $\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in F$. De même, $\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in G$. Donc $\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in F \cap G$.

De ces trois points, on a le résultat. ■

⚠ La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général car il n'est pas stable par addition. Voyons sur un exemple.

Exemple 5.2 Montrer que $F \cup G$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$ où $F = \text{Vect}((1, 0))$ et $G = \text{Vect}((0, 1))$. Faire une illustration graphique.

Exemple 5.3 Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + t = 0\}$. Montrer que $F \cap G$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une famille génératrice de $F \cap G$.

Exemple 5.4 Soient $F = \text{Vect}(\exp, \cos, \sin)$ et $G = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Déterminer $F \cap G$.

5.2 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 5.5 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On appelle **somme de F et G** l'ensemble

$$F + G = \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in F \text{ et } \vec{y} \in G\}$$

Autrement dit,

$$\vec{u} \in F + G \iff \vec{u} = \vec{x} + \vec{y} \text{ avec } \vec{x} \in F \text{ et } \vec{y} \in G$$



Il ne faut pas confondre somme et réunion. La somme est un sous-espace vectoriel mais pas la réunion en générale.

Illustration graphique.

Proposition 5.6 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . La somme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E . De plus, $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G :

$$F + G = \text{Vect}(F \cup G)$$

Exemple 5.7 Soient $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(2a, -a, 0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $u = (3, -2, 1, 0) \in F + G$.

Exemple 5.8 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $M \in S_2(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 5.9 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On a,

- | | |
|--------------------|----------------------------|
| a) $F + G = G + F$ | b) $F + \{\vec{0}_E\} = F$ |
| c) $F + E = E$ | d) $F + F = F$ |

On peut étudier facilement une somme de sous-espaces vectoriels connaissant des familles génératrices de chacun des sous-espaces vectoriels grâce à la proposition suivante.

Proposition 5.10 Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $F = \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ et $G = \text{Vect}(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p)$ alors

$$F + G = \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p)$$

Ainsi, une famille génératrice de $F + G$ est $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p)$.

Exemple 5.11 Soient $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(2a, -a, 0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Écrire $F + G$ «comme un Vect».

5.3 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition 5.12 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que la somme $F + G$ est **directe**, et on note $F \oplus G$, si tout élément $\vec{u}$ de $F + G$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$.



La seule différence entre $F + G$ et $F \oplus G$ est que le symbole $\oplus$ précise l'unicité de la décomposition.

Exemple 5.13 Soient $F = \text{Vect}((1, 1), (0, 1))$ et $G = \text{Vect}((1, 0))$. Montrer que la somme $F + G$ n'est pas directe. *Faire une illustration graphique.*

Pour montrer qu'une somme est directe, on utilise souvent la proposition suivante.

Proposition 5.14 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . La somme $F + G$ est directe si et seulement si

$$F \cap G = \{\vec{0}_E\}$$

Exemple 5.15 Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que la somme $F + G$ est directe.

Exemple 5.16 Montrer que la somme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est directe.

5.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 5.17 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont **supplémentaires dans E** (ou que F est un supplémentaire de G dans E) si

- ❶ La somme de F et G est directe : $F + G = F \oplus G$,
- ❷ La somme de F et G vaut E : $E = F + G$.

On note alors $E = F \oplus G$.



Il faut bien distinguer les notions de « F et G sont en somme directe» et « E est la somme directe de F et G » (c'est-à-dire que la somme $F + G$ "remplit" E tout entier).

Illustration graphique.

Exemple 5.18 Soient $F = \text{Vect}((1, 0, 0))$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 0))$. Montrer que la somme de F et G est directe mais que F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 5.19 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si

$$\begin{cases} \textcircled{1} & F \cap G = \{\vec{0}_E\}, \\ \textcircled{2} & E = F + G. \end{cases}$$

Exemple 5.20 Soient $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 5.21 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément $\vec{u}$ de E s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$.

Exemple 5.22 Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.