

TD 24 – Espaces vectoriels

1 Combinaison linéaire

Exercice 1 – Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient $u = (7, 2, -6)$, $u_1 = (2, 1, -1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 2)$. Montrer que u est une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 .
2. Soient $u = (1, 1, 1)$, $u_1 = (1, 1, 2)$ et $u_2 = (1, -1, 0)$. Montrer que u n'est pas une combinaison linéaire de u_1 et u_2 .
3. Montrer que M est une combinaison linéaire de M_1 et M_2 où

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que $P = 2X^3 + X - X^2$ est combinaison linéaire de X^3 , $X^2 + X$, $X^2 - X$ et 1 .

Exercice 2 – Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et les deux vecteurs $e_1 = (1, 2, 1)$ et $e_2 = (1, 0, \alpha)$ de $\mathbb{R}^3$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $e_3 = (-3, -10, 1) \notin \text{Vect}(e_1, e_2)$.

Exercice 3 – Soit $G = \text{Vect}((1, -1, -1), (-6, 1, 4))$. Les vecteurs $v_1 = (1, 4, 1)$ et $v_2 = (-1, 0, 1)$ appartiennent-ils à G ?

Exercice 4 – Problème d'identification. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer que, de manière générale, si, pour deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans E et quatre scalaires λ, μ, a, b , on a,

$$\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y}$$

on ne peut pas en déduire que $\lambda = a$ et $\mu = b$. On exhibera un contre-exemple.

Exercice 5 – En effectuant des «manipulations sur les Vect», montrer les égalités suivantes.

- a) $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$
- b) $\text{Vect}(1 + X, X + X^2, X^2 + X + 1) = \mathbb{R}_2[X]$
- c) $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3$

2 Sous-espace vectoriel

Exercice 6 – Pas des sev. Justifier que les ensembles suivants ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
- b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
- c) $\{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
- e) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$
- f) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 1\}$

g) L'ensemble des suites croissantes

h) $\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1\}$

i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

j) L'ensemble des polynômes P tels que $\deg(P) \geq 2$

Exercice 7 – Des sev. Montrer à l'aide de la caractérisation d'un sous-espace vectoriel que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

- a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$
- b) $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$
- c) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\}$
- d) L'ensemble des fonctions constantes
- e) L'ensemble des matrices antisymétriques
- f) L'ensemble des suites bornées

Exercice 8 – Question ouverte.

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E , déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E .
 - a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 1\}$
 - b) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y + z = x^2\}$
 - c) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0\}$
 - d) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0 \text{ et } 3x - y + z = 0\}$
 - e) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x = yz\}$
2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E , déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E .
 - a) L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
 - b) L'ensemble des fonctions telles que $f(\pi) = 3$.
 - c) L'ensemble des fonctions croissantes.
 - d) L'ensemble des fonctions paires.
 - e) L'ensemble des fonctions majorées.

Exercice 9 – Avec un Vect. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels en montrant que ce sont des sous-espaces vectoriels engendrés.

- a) $\{(t, 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- b) $\{(a, a + b, b - c, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$
- c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$
- d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
- e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$
- f) $\left\{ \begin{pmatrix} a + b & c \\ -a + 2c & -b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
- g) $\{a + (b - a)X + (2b - a)X^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- h) $\{\alpha X^3 + \beta X + \alpha + \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- i) $\{x \mapsto \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{3x} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

Exercice 10 – Gare à l'union. Montrer que les ensembles

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \text{ et } G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $F \cup G$ est-il un espace vectoriel ?

3 Forme paramétrique et conditionnelle

Exercice 11 – Du conditionnel au paramétrique. Écrire les ensembles suivants sous forme paramétrique.

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 4y = 0\}$
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + z = 0 \text{ et } y + z = 0\}$
- $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b + c = 2a - c + d = 0 \right\}$

Exercice 12 – Du paramétrique au conditionnel. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- On considère le vecteur de $\mathbb{R}^3$ suivant : $u_1 = (1, 2, 3)$. Soit $G_1 = \text{Vect}(u_1)$. Trouver un système d'équations définissant G_1 .
- On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$. Soit $G_2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$. Trouver un système d'équations définissant G_2 .
- On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$. Soit $G_3 = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Trouver un système d'équations définissant G_3 .

4 Famille génératrice

Exercice 13 – Famille génératrice via décomposition.

- Montrer que $((1, 2), (0, -1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que la famille $(1, X + X^2, X - X^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Montrer que la famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 – Famille génératrice via un Vect. Écrire les ensembles suivants sous forme d'un Vect et en donner une famille génératrice.

- $F = \text{Vect}((1, 2, 0), (2, 1, 0), (1, 0, 1))$
- $F = \{(t, 4t), t \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R}^2$
- $F = \{(a, a + b, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ dans $\mathbb{R}^3$
- $F = \{(a + b, a - 2b, 3b - a), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ dans $\mathbb{R}^3$
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$
- $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$ dans $\mathbb{R}^4$
- $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = c - d = 0 \right\}$
- $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$
- $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid 2P(X + 1) = XP'(X)\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$

Exercice 15 – Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en donner une famille génératrice.

- L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' - xy = 0$
- L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y = 0$
- L'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0$
- L'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$
- L'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$

Exercice 16 – Soit $n \geq 2$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on considère F la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par,

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose $u_i = e_i - e_n$. Montrer que

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$$

et en déduire une famille génératrice de F .

5 Intersection et Somme de sous-espace vectoriel

Exercice 17 – On pose

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3z = 0\}$$
$$G = \{(2a + b, a - b, 3a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

- Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
- Sans calcul, justifier que l'ensemble $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer $F \cap G$.
- Déterminer une famille génératrice de $F + G$.
- La somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice 18 – Soient

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1)\}$$
$$G = \text{Vect}(X - 1, (X - 1)^2)$$

- Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
- Déterminer une famille génératrice de $F \cap G$.
- Déterminer une famille génératrice de $F + G$.
- La somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice 19 – On définit les vecteurs suivants de $E = \mathbb{R}^4$: $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 1, 0)$ et $\vec{u}_4 = (1, 1, 1, 1)$. On pose $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $G = \text{Vect}(\vec{u}_3, \vec{u}_4)$. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 20 – Soient

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 4z = 0\}$$
$$G = \text{Vect}(1, -2, -1)$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 21 – Soient $F = \text{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P' = 0\}$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 22 – Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On considère

$$F = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\}$$

et G l'ensemble des fonctions constantes. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .