

TD 24 – Espaces vectoriels (Correction)

1 Combinaison

linéaire

Exercice 1 – Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient $u = (7, 2, -6)$, $u_1 = (2, 1, -1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 2)$. Montrer que u est une combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3 .

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} u = au_1 + bu_2 + cu_3 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 7 \\ a + b + c = 2 \\ -a + b + 2c = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2a + b = 7 \\ -a + b + 2c = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \\ -b - 2c = 3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2b + 3c = -4 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \\ -b - 2c = 3 \\ -c = 2 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, finalement,

$$u = 3 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 - 2 \cdot u_3$$

et donc u est bien une combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2 et u_3 .

2. Soient $u = (1, 1, 1)$, $u_1 = (1, 1, 2)$ et $u_2 = (1, -1, 0)$. Montrer que u n'est pas une combinaison linéaire de u_1 et u_2 .

Supposons par l'absurde que u est une combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2 . Alors, il existe deux réels a et b tels que $u = au_1 + bu_2$. Donc, les réels a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 1 \\ 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

C'est donc absurde. Ainsi, u n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2 .

3. Montrer que M est une combinaison linéaire de M_1 et M_2 où

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer directement (ou faire résoudre le système sous-jacent) que

$$M = -3M_1 + \frac{1}{2}M_2$$

4. Montrer que $P = 2X^3 + X - X^2$ est combinaison linéaire de $X^3, X^2 + X, X^2 - X$ et 1 .

On peut remarquer directement (ou faire résoudre le système sous-jacent) que

$$P = 2 \cdot X^3 + 0 \cdot (X^2 + X) + (-1) \cdot (X^2 - X) + 0 \cdot 1$$

Exercice 2 – Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et les deux vecteurs $e_1 = (1, 2, 1)$ et $e_2 = (1, 0, \alpha)$ de $\mathbb{R}^3$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $e_3 = (-3, -10, 1) \notin \text{Vect}(e_1, e_2)$.

Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned}
 e_3 = (-3, -10, 1) \in \text{Vect}(e_1, e_2) &\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, & e_3 = ae_1 + be_2 \\
 &\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, & \begin{cases} a + b = -3 \\ 2a = -10 \\ a + b\alpha = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, & \begin{cases} a + b = -3 \\ a = -5 \\ a + b\alpha = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, & \begin{cases} b = 2 \\ a = -5 \\ b\alpha = 6 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \alpha = 3
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$e_3 = (-3, -10, 1) \notin \text{Vect}(e_1, e_2)$	$\Leftrightarrow$	$\alpha \neq 3$
---	-------------------	-----------------

Exercice 3 – Soit $G = \text{Vect}((1, -1, -1), (-6, 1, 4))$. Les vecteurs $v_1 = (1, 4, 1)$ et $v_2 = (-1, 0, 1)$ appartiennent-ils à G ?

- Montrons que $v_1 = (1, 4, 1) \in G$, c'est-à-dire trouvons deux réels a et b tels que

$$v_1 = a(1, -1, -1) + b(-6, 1, 4).$$

Pour trouver les coefficients a et b , on peut résoudre le système donné par l'égalité au-dessus. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$v = a(1, -1, -1) + b(-6, 1, 4) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = 1 \\ -a + b = 4 \\ -a + 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = 1 \\ -5b = 5 \\ -2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Finalement, on obtient que

$$v_1 = -5(1, -1, -1) - (-6, 1, 4)$$

Et donc que v_1 appartient à G .

Montrons que $v_2 = (-1, 0, 1) \notin G$. Supposons par l'absurde que $v_1 \in G$. Alors, il existe deux réels a et b tels que

$$v_2 = a(1, -1, -1) + b(-6, 1, 4),$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a - 6b = -1 \\ -a + b = 0 \\ -a + 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = 1 \\ -5b = -1 \\ -2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = 1 \\ b = \frac{1}{5} \\ b = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont incompatibles. C'est absurde. Donc v_2 n'appartient pas à G .

Exercice 4 – Problème d'identification. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer que, de manière générale, si, pour deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans E et quatre scalaires λ, μ, a, b , on a,

$$\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y}$$

on ne peut pas en déduire que $\lambda = a$ et $\mu = b$. *On exhibera un contre-exemple.*

Dans $E = \mathbb{R}^2$, on peut remarquer que

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pourtant on ne peut pas identifier les coefficients devant chacun des vecteurs.

Exercice 5 – En effectuant des «manipulations sur les Vect», montrer les égalités suivantes.

$$\text{a) } \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

On commence par échanger le deuxième vecteur par lui-même moins le premier vecteur.

$$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Puis le troisième s'échange en lui-même moins le premier vecteur.

$$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Puis le premier devient la somme des deux autres.

$$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

et en enlevant le vecteur redondant, on trouve

$$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{b) } \text{Vect}(1 + X, X + X^2, X^2 + X + 1) = \mathbb{R}_2[X]$$

Par opérations, on se ramène à

$$\text{Vect}(1 + X, X + X^2, X^2 + X + 1) = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$$

$$\text{c) } \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^3$$

Par opérations, on se ramène à

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^3$$

2 Sous-espace

vectoriel

Exercice 6 – Pas des sev. Justifier que les ensembles suivants ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

car $(0, 0) \notin F$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$

car $(0, 1) \in F$ mais $(-1) \cdot (0, 1) \notin F$

c) $\{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

car $(1, 1) \in F$ mais $(-1) \cdot (1, 1) \notin F$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

car $(1, 0) \in F$ et $(0, 1) \in F$ mais $(1, 0) + (0, 1) \notin F$

e) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$

car $x \mapsto 1 \in F$ mais $x \mapsto -1 \notin F$

f) $\left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 1\right\}$

car la fonction nulle n'appartient pas à F

g) L'ensemble des suites croissantes

car $(1)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ mais $(-1)_{n \in \mathbb{N}} \notin F$

h) $\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1\}$

car la suite nulle n'appartient pas à F

i) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$

car la matrice nulle n'appartient pas à F

j) L'ensemble des polynômes P tels que $\deg(P) \geq 2$

car le polynôme nul n'appartient pas à F

Exercice 7 – Des sev. Montrer à l'aide de la caractérisation d'un sous-espace vectoriel que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

a) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$

Montrons que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- ① F_1 est bien inclus dans $\mathbb{R}^3$.
- ② L'élément neutre $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ appartient à F_1 car $0 + 0 - 2 \times 0 = 0$.
- ③ Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de F_1 , c'est-à-dire deux éléments de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient

$$x_1 + y_1 - 2z_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 + y_2 - 2z_2 = 0$$

et soient a et b deux nombres réels. Montrons que le vecteur $au + bv$ est dans F_1 .

- Dans un premier temps, on peut calculer que le vecteur $au + bv$ est donné par

$$au + bv = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2) = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2, az_1 + bz_2) = (X, Y, Z).$$

- Montrons que $au + bv \in F_1$, c'est-à-dire que

$$X + Y - 2Z = 0.$$

En utilisant le fait que u et v sont dans F_1 , on obtient que

$$\begin{aligned} X + Y - 2Z &= ax_1 + bx_2 + ay_1 + by_2 - 2(az_1 + bz_2) \\ &= a(x_1 + y_1 - 2z_1) + b(x_2 + y_2 - 2z_2) \\ &= a \cdot 0 + b \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $au + bv \in F_1$.

Donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$

Montrons que F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- ① F_2 est bien inclus dans $\mathbb{R}[X]$.
- ② Le polynôme nul appartient à F_2 car l'évaluation en 1 vaut 0.
- ③ Soient P et Q deux polynômes de F_2 :

$$P(1) = 0 \quad Q(1) = 0$$

et a, b deux scalaires. Montrons que $aP + bQ \in F_2$. Alors,

$$(aP + bQ)(1) = aP(1) + bQ(1) = a \times 0 + b \times 0 = 0$$

Donc $aP + bQ \in F_2$.

Donc F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

c) $\left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\right\}$

d) L'ensemble des fonctions constantes

e) L'ensemble des matrices antisymétriques

f) L'ensemble des suites bornées

Exercice 8 – Question ouverte.

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E , déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E .

a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 1\}$

b) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y + z = x^2\}$

c) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0\}$

d) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0 \text{ et } 3x - y + z = 0\}$

e) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x = yz\}$

2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E , déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E .

a) L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

b) L'ensemble des fonctions telles que $f(\pi) = 3$.

c) L'ensemble des fonctions croissantes.

d) L'ensemble des fonctions paires.

e) L'ensemble des fonctions majorées.

Exercice 9 – Avec un Vect. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels en montrant que ce sont des sous-espaces vectoriels engendrés.

a) $\{(t, 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \boxed{\text{Vect}((1, 3, 1))}$

b) $\{(a, a+b, b-c, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \boxed{\text{Vect}((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, -1, 1))}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\} = \boxed{\text{Vect}((1, 2))}$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} = \boxed{\text{Vect}((1, 1))}$

e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} = \boxed{\text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))}$

f) $\left\{ \begin{pmatrix} a+b & c \\ -a+2c & -b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \boxed{\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)}$

g) $\{a + (b-a)X + (2b-a)X^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \boxed{\text{Vect}(1 - X - X^2, X + 2X^2)}$

h) $\{\alpha X^3 + \beta X + \alpha + \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \boxed{\text{Vect}(X^3 + 1, X + 1)}$

i) $\{x \mapsto \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{3x} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \boxed{\text{Vect}(f_1, f_2)}$ avec $f_1 : x \mapsto e^{2x}$ et $f_2 : x \mapsto e^{3x}$

Exercice 10 – Gare à l’union. Montrer que les ensembles

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \text{ et } G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. L’ensemble $F \cup G$ est-il un espace vectoriel ?

On peut commencer par remarquer que

$$F = \text{Vect}((1, -1)) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((1, 1))$$

donc F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

L’ensemble $F \cup G$ n’est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet, $(1, -1) \in F$ et donc $(1, -1) \in F \cup G$. Mais aussi $(1, 1) \in G$ donc $(1, 1) \in F \cup G$. Mais $(1, -1) + (1, 1) = (2, 0) \notin F \cup G$ (car il n’appartient ni à F ni à G).

3 **Forme paramétrique** **et** **conditionnelle**

Exercice 11 – Du conditionnel au paramétrique. Écrire les ensembles suivants sous forme paramétrique.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 4y = 0\}$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a,

$$\begin{aligned} (x, y) \in F &\iff x + 4y = 0 \\ &\iff x = -4y \\ &\iff (x, y) = (-4y, y) \\ &\iff (x, y) \in \{(-4t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 4y = 0\} = \{(-4t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}}$$

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + z = 0 \text{ et } y + z = 0\}$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F &\iff \begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff (...) \\ &\iff \begin{cases} x = -3z \\ y = z \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = (-3z, -z, z) \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + z = 0 \text{ et } y + z = 0\} = \{(-3z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}}$$

c) $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors,

$$\begin{aligned} P \in F &\iff P(0) = 2P(1) \\ &\iff c = 2(a + b + c) \\ &\iff 2a + 2b + c = 0 \\ &\iff c = -2a - 2b \\ &\iff P = aX^2 + bX - 2a - 2b \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + z = 0 \text{ et } y + z = 0\} = \{aX^2 + bX - 2a - 2b \mid a, b \in \mathbb{R}\}}$$

$$\text{d) } \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a+b+c=2a-c+d=0 \right\}$$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a,

$$\begin{aligned} M \in F &\iff a+b+c=2a-c+d=0 \\ &\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a - c + d = 0 \end{cases} \\ &\iff (...) \\ &\iff \begin{cases} c = -a-b \\ d = -3a-b \end{cases} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a-b & -3a-b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a+b+c=2a-c+d=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a-b & -3a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice 12 – Du paramétrique au conditionnel. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère le vecteur de $\mathbb{R}^3$ suivant : $u_1 = (1, 2, 3)$. Soit $G_1 = \text{Vect}(u_1)$. Trouver un système d'équation-s définissant G_1 .

Soit $G_1 = \text{Vect}((1, 2, 3))$. Trouvons un système d'équation-s définissant G_1 . Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in G_1 &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \quad a(1, 2, 3) = u \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a = x \\ 2a = y \\ 3a = z \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $y = 2x$ et $z = 3x$ alors ce système admet bien une solution.
- Si $y \neq 2x$ ou $z \neq 3x$ alors ce système n'admet pas de solution (lignes incompatibles).

Finalement,

$$u \in G_1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x \quad \text{et} \quad z = 3x.$$

Donc

$$G_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \text{ et } z = 3x\}$$

2. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$. Soit $G_2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$. Trouver un système d'équation-s définissant G_2 .

Soit $G_2 = \text{Vect}((1, 2, 3), (-1, 0, 1))$. Trouvons un système d'équation-s définissant G_2 . Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in G_2 &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a(1, 2, 3) + b(-1, 0, 1) = u \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a - b = x \\ 2a = y \\ 3a + b = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} b = \frac{y}{2} - x \\ a = \frac{y}{2} \\ b = z - \frac{3y}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $\frac{y}{2} - x = z - \frac{3y}{2}$ alors ce système admet bien une solution.
- Si $\frac{y}{2} - x \neq z - \frac{3y}{2}$ alors ce système n'admet pas de solution (lignes incompatibles).

Finalement,

$$u \in G_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{2} - x = z - \frac{3y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y - 2x = 2z - 3y \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y + z = 0$$

Donc

$$G_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

3. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$ Soit $G_3 = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Trouver un système d'équation-s définissant G_2 .

On montre de même que $G_3 = \mathbb{R}^3$.

4 Famille

génératrice

Exercice 13 – Famille génératrice via décomposition.

1. Montrer que $((1, 2), (0, -1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Soient $e_1 = (1, 2)$ et $e_2 = (0, -1)$. Montrons que (e_1, e_2) est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

- ① Les vecteurs e_1 et e_2 appartiennent à $\mathbb{R}^2$.
- ② Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe a et b deux réels tels que $u = ae_1 + be_2$. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$ae_1 + be_2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ 2a - b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = 2x - y \end{cases}$$

En prenant $a = x$ et $b = 2x - y$ on a bien $u = ae_1 + be_2$. Ceci prouve que la famille (e_1, e_2) est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Soient $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$. Montrons que (e_1, e_2, e_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

- ① Les vecteurs e_1 , e_2 et e_3 appartiennent à $\mathbb{R}^3$.
- ② Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe a , b et c trois réels tels que $u = ae_1 + be_2 + ce_3$. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} ae_1 + be_2 + ce_3 = u &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ a + c = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ -b + c = z - x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ 2c = z - x + y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}(x - y + z) \\ b = \frac{1}{2}(x + y - z) \\ c = \frac{1}{2}(-x + y + z) \end{cases} \end{aligned}$$

En prenant $a = \frac{1}{2}(x - y + z)$, $b = \frac{1}{2}(x + y - z)$ et $c = \frac{1}{2}(-x + y + z)$, on a bien $u = ae_1 + be_2 + ce_3$. Ceci prouve que la famille (e_1, e_2, e_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

3. Montrer que la famille $(1, X + X^2, X - X^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient $P_1 = 1$, $P_2 = X + X^2$ et $P_3 = X - X^2$.

- ① Les vecteurs P_1 , P_2 et P_3 appartiennent à $\mathbb{R}_2[X]$.
- ② Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, on peut montrer que

$$P = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)P_1 + \left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)P_2 + cP_3$$

Donc la famille $(1, X + X^2, X - X^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Montrer que la famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ① Les vecteurs M_1 , M_2 , M_3 et M_4 appartiennent à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

② Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors, on peut montrer que

$$M = dM_1 + cM_2 + (a-d)M_3 + (b-c)M_4$$

Donc la famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 14 – Famille génératrice via un Vect. Écrire les ensembles suivants sous forme d'un Vect et en donner une famille génératrice.

1. $F = \text{Vect}((1, 2, 0), (2, 1, 0), (1, 0, 1))$

L'ensemble F est déjà écrit comme un Vect. On en déduit directement que la famille $((1, 2, 0), (2, 1, 0), (1, 0, 1))$ est une famille génératrice de F .

2. $F = \{(t, 4t), t \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R}^2$

Déterminons une famille génératrice de $F_5 = \{(t, 4t), t \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble est défini de manière paramétrique avec un paramètre (Étape 1). Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} u \in F_5 &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, u = (t, 4t) && \text{(Étape 2)} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, u = t(1, 4) && \text{(Étape 3)} \\ &\Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1, 4)) && \text{(Étape 4)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_5 = \text{Vect}((1, 4))$$

donc F_5 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et la famille $((1, 4))$ est génératrice de F_5 .

3. $F = \{(a, a+b, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ dans $\mathbb{R}^3$

Déterminons une famille génératrice de $F_7 = \{(a, a+b, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. L'ensemble est défini de manière paramétrique avec deux paramètres (Étape 1). Soit $u \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} u \in F_7 &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, u = (a, a+b, b) && \text{(Étape 2)} \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, u = a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) && \text{(Étape 3)} \\ &\Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1)) && \text{(Étape 4)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_7 = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$$

donc F_7 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et la famille $((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ est génératrice de F_7 .

4. $F = \{(a+b, a-2b, 3b-a), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ dans $\mathbb{R}^3$

On montre de même que

$$F = \text{Vect}((1, 1, -1), (1, -2, 3))$$

et $((1, 1, -1), (1, -2, 3))$ est génératrice de F_8 .

5. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$

Déterminons une famille génératrice de $F_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in F_9 \Leftrightarrow x - 2y + 3z = 0$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue principale - par exemple x - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes, ici y et z .

$$u \in F_9 \Leftrightarrow x = 2y - 3z$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F_9 &\Leftrightarrow u = (2y - 3z, y, z) \\ &\Leftrightarrow u = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) \\ &\Leftrightarrow u \in \text{Vect}((2, 1, 0), (-3, 0, 1)) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_9 = \text{Vect}((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$$

donc F_9 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et la famille $(2, 1, 0), (-3, 0, 1)$ est génératrice de F_9 .

6. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$ dans $\mathbb{R}^4$

Déterminons une famille de génératrice de $F_{10} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec quatre inconnues et deux équations. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in F_{10} \quad \Leftrightarrow \quad (S) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \end{cases}$$

On a deux équations pour quatre inconnues : on choisit deux inconnues principales - par exemple x et y - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes, ici z et t , grâce à la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned} (S) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z - t = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = -z - t \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F_{10} & \Leftrightarrow u = (t, -z - t, z, t) \\ & \Leftrightarrow u = z(0, -1, 1, 0) + t(1, -1, 0, 1) \\ & \Leftrightarrow u \in \text{Vect}((0, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_{10} = \text{Vect}((0, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1))$$

donc F_{10} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et la famille $(0, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)$ est génératrice de F_{10} .

7. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = c - d = 0 \right\}$

On montre de même que

$$F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

8. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$

On montre que

$$F = \text{Vect}(X^3 - 3X + 2, X^2 - 2X + 1)$$

9. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid 2P(X + 1) = XP'(X)\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$

On montre que

$$F = \text{Vect}(X^2 - 4X + 3)$$

Exercice 15 – Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en donner une famille génératrice.

1. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' - xy = 0$

$$\text{Vect}(x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}})$$

2. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y = 0$

$$\text{Vect}(\cos, \sin)$$

3. L'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0$

$$\text{Vect}((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n(-2)^n)_{n \in \mathbb{N}})$$

4. L'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$

$$\text{Vect}(x \mapsto 1)$$

5. L'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$

$$\text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x)$$

Exercice 16 – Soit $n \geq 2$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on considère F la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par,

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on pose $u_i = e_i - e_n$. Montrer que $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$ et en déduire une famille génératrice de F .

5 Intersection et Somme de sous-espace vectoriel

Exercice 17 – On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3z = 0\}$ et $G = \{(2a + b, a - b, 3a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

On a,

$$F = \text{Vect}((1, -2, 0), (0, 3, 1)) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((2, 1, 3), (1, -1, -1))$$

Donc F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Sans calcul, justifier que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Résultat du cours : L'intersection de deux sev est un sev.

3. Déterminer $F \cap G$.

Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. D'une part

$$2x + y - 3z = 0$$

D'autre part, il existe a et b tels que

$$(x, y, z) = (2a + b, a - b, 3a - b)$$

En combinant, on trouve que $a = b$. D'où

$$(x, y, z) = (2a + b, a - b, 3a - b) = (3a, 0, 2a)$$

Ainsi,

$$F \cap G = \{(3a, 0, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((3, 0, 2))$$

4. Déterminer une famille génératrice de $F + G$.

On sait que

$$F = \text{Vect}((1, -2, 0), (0, 3, 1)) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((2, 1, 3), (1, -1, -1))$$

donc

$$F + G = \text{Vect}((1, -2, 0), (0, 3, 1), (2, 1, 3), (1, -1, -1))$$

et la famille $((1, -2, 0), (0, 3, 1), (2, 1, 3), (1, -1, -1))$ est une famille génératrice de $F + G$.

5. La somme $F + G$ est-elle directe ?

Comme $F \cap G \neq \{0\}$, la somme $F + G$ n'est pas directe.

Exercice 18 – Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1)\}$ et $G = \text{Vect}(X-1, (X-1)^2)$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.

On montre que

$$F = \text{Vect}(-X^3 + X^2, -X^2 + X, 1) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(X-1, (X-1)^2)$$

Donc F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer une famille génératrice de $F \cap G$.

Soit $P \in F \cap G$. D'autre part

$$P(0) = P(1)$$

D'autre part, il existe a et b tels que

$$P = a(X-1) + b(X-1)^2$$

On en déduit que

$$-a + b = 0$$

Donc,

$$P = a(X-1) + a(X-1)^2 = a(X-1)[1 + X-1] = a(X-1)X$$

Donc

$$F \cap G = \text{Vect}((X-1)X)$$

et la famille $((X-1)X)$ est une famille génératrice de $F \cap G$.

3. Déterminer une famille génératrice de $F + G$.

On montre que

$$F + G = \text{Vect}(-X^3 + X^2, -X^2 + X, 1, X-1, (X-1)^2)$$

ce qui surement simplifiable...

4. La somme $F + G$ est-elle directe ?

Comme $F \cap G \neq \{0\}$, la somme $F + G$ n'est pas directe.

Exercice 19 – On définit les vecteurs suivants de $E = \mathbb{R}^4$: $\vec{u}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 1, 0)$ et $\vec{u}_4 = (1, 1, 1, 1)$. On pose $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $G = \text{Vect}(\vec{u}_3, \vec{u}_4)$. Montrer que $E = F \oplus G$.

Montrons que $E = F \oplus G$.

- Montrons que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Soit $u = (x, y, z, t) \in F \cap G$. D'une part, comme $u \in F$, on sait qu'il existe a et b tels que

$$u = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = (a+b, b, 0, 0)$$

D'autre part, comme $u \in G$, on sait qu'il existe c et d tels que

$$u = c\vec{u}_3 + d\vec{u}_4 = (c+d, c+d, c+d, d)$$

En combinant ces deux égalités, on trouve,

$$(a+b, b, 0, 0) = (c+d, c+d, c+d, d)$$

On obtient alors $d = 0$ (avec la 4ème coordonnée), puis $c = 0$ (avec la troisième). Ainsi,

$$u = (c+d, c+d, c+d, d) = (0, 0, 0, 0)$$

D'où $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

- Montrons que $E = F + G$. D'après les propriétés sur les vect, on sait que

$$F + G = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$$

On va alors réaliser des opérations pour montrer que $F + G = \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) && (\vec{u}_4 \leftarrow \vec{u}_4 - \vec{u}_3) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) && (\vec{u}_3 \leftarrow \vec{u}_3 - \vec{u}_2) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) && (\vec{u}_2 \leftarrow \vec{u}_2 - \vec{u}_1) \\ &= \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

D'où $F + G = E$.

D'où $E = F \oplus G$.

Exercice 20 – Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 4z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(1, -2, -1)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Soit $u = (x, y, z) \in F \cap G$. Comme $u \in F$, on a

$$x - y - 4z = 0$$

De plus, comme $u \in G$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$u = a(1, -2, -1) = (a, -2a, -a)$$

En combinant les deux informations, on a,

$$a - (-2a) - 4(-a) = 0$$

D'où $7a = 0$, c'est-à-dire $a = 0$ et donc

$$u = (a, -2a, -a) = (0, 0, 0)$$

Et donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

- Montrons que $E = F + G$. On peut montrer que

$$F = \text{Vect}((1, 1, 0), (4, 0, 1))$$

Donc,

$$F + G = \text{Vect}((1, 1, 0), (4, 0, 1), (1, -2, -1))$$

Puis par opérations sur le vect, on montre que

$$\boxed{F + G} = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)) \boxed{= \mathbb{R}^3}$$

D'où $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}^3}$.

Exercice 21 – Soient $F = \text{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P' = 0\}$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]$.

- Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $P \in F \cap G$. D'une part, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que

$$P = aX + bX^2$$

D'autre part,

$$P' = 0$$

D'où

$$a + 2bX = 0$$

Donc en identifiant les coefficients, $a = 0$ et $b = 0$. Donc, P est le polynôme nul. D'où

$$\boxed{F \cap G = \{0\}}$$

- Montrons que $E = F + G$. On peut montrer que

$$G = \text{Vect}(1)$$

Donc,

$$\boxed{F + G} = \text{Vect}(1, X, X^2) \quad \boxed{= \mathbb{R}_2[X]}$$

D'où $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]}.$

Exercice 22 – Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On considère $F = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

- Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $f \in F \cap G$. D'une part, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = c$$

D'autre part,

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

D'où

$$0 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 cdx = [cx]_0^1 = c$$

Donc, f est la fonction nulle. D'où $F \cap G = \{0\}$

- Montrons que $E = F + G$. On a $F + G \subset E$. Montrons que $E \subset F + G$. Soit $f \in E$. Alors,

$$f = \underbrace{f - \int_0^1 f(x)dx}_{\in F} + \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{\in G}$$

D'où $E = F + G$.

D'où $E = F \oplus G$.