

DM 6

À rendre pour le mardi 24 février (facultatif)

Exercice 1 – Dans cet exercice, on cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X^2 - 1) = P(X - 1)P(X + 1) \quad (E)$$

1. Déterminer les polynômes constants solutions de (E).

Soit $P = c \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme constant (avec $c \in \mathbb{C}$). On a,

$$\begin{aligned} P \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow P(X^2 - 1) = P(X - 1)P(X + 1) \\ &\Leftrightarrow c = c \times c \\ &\Leftrightarrow c^2 - c = 0 \\ &\Leftrightarrow c(c - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 0 \text{ ou } c = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, les polynômes constants qui sont solutions de (E) sont

$$\boxed{P = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{P = 0}$$

2. Déterminer les polynômes de degré 1 solutions de (E).

Soit $P = aX + b \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré 1 (avec $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$). On a,

$$\begin{aligned} P \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow P(X^2 - 1) = P(X - 1)P(X + 1) \\ &\Leftrightarrow a(X^2 - 1) + b = [a(X - 1) + b] \times [a(X + 1) + b] \\ &\Leftrightarrow aX^2 - a + b = [aX - a + b] \times [aX + a + b] \\ &\Leftrightarrow aX^2 - a + b = a^2X^2 + 2abX + b^2 - a^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = a^2 \\ 0 = 2ab \\ -a + b = b^2 - a^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 0 = 2ab \\ -a + b = b^2 - a^2 \end{cases} \quad \text{car } a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ -1 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un unique polynôme de degré 1 qui est solutions de (E), qui vaut

$$\boxed{P = X}$$

On suppose pour toute la suite P non constant **vérifiant l'équation (E)**. On note $d = \deg(P) > 0$.

3. Quel théorème assure alors l'existence d'une racine de P dans $\mathbb{C}$?

Comme P est un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P . On pose $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$$

4. Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (u_n + 1)^2 - 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$\begin{aligned} \boxed{(u_n + 1)^2 - 1} &= u_n^2 + 2u_n + 1 - 1 && \text{en développant} \\ &= u_n^2 + 2u_n \\ &\boxed{= u_{n+1}} && \text{d'après l'énoncé} \end{aligned}$$

5. Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P .

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : \ll P(u_n) = 0 \gg$ est vraie.

- *Initialisation.* Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. D'après l'énoncé,

$$P(u_0) = P(a) = 0$$

(car a est une racine de P). Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que

$$P(u_n) = 0$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que

$$P(u_{n+1}) = 0$$

On a,

$$\begin{aligned} P(u_{n+1}) &= P(u_n^2 + 2u_n) && \text{d'après l'énoncé} \\ &= P((u_n + 1)^2 - 1) && \text{d'après la question précédente} \\ &= P(u_n + 1 - 1) \times P(u_n + 1 + 1) && \text{car } P \text{ vérifie (E)} \\ &= P(u_n) \times P(u_n + 2) \\ &= 0 \times P(u_n + 2) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ est racine de } P}$$

6. Expliquer pourquoi on ne peut pas (encore) conclure de la question précédente que P admet une infinité de racines.

À la question précédente, on a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P . Comme on ne sait pas (encore) que les termes de la suite sont deux à deux distincts, on ne peut pas en conclure que P admet une infinité de racines.

On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{R}$ est une **racine réelle** de P et on définit f :

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 2x\end{aligned}$$

7. Préciser le tableau de variations de f . On fera apparaître dans le tableau les limites qui auront été soigneusement justifiées au préalable.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$$

On en déduit alors le tableau de signes de f' puis les variations de f de la manière suivante.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\begin{smallmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{smallmatrix}$	$+$
f	$+\infty$	-1	$+\infty$

Pour les limites, on peut commencer par remarquer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ donc, par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Pour la limite en $-\infty$, a priori, on est face à une forme indéterminée, que l'on résout en remarquant l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

8. En déduire que $u_1 \in [-1, +\infty[$.

Grâce à la question précédente, on peut remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq -1$$

Or, $u_1 = f(u_0)$ et donc,

$$u_1 \geq -1$$

c'est-à-dire

$$u_1 \in [-1, +\infty[$$

9. Premier cas. On suppose dans un premier temps que $u_1 \in]0, +\infty[$.

- (a) Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, +\infty[$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n) : \langle u_n > 0 \rangle$ est vraie.

- *Initialisation.* Montrons que $\mathcal{P}(1)$ est vraie. D'après l'énoncé,

$$u_1 > 0$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- *Hérédité.* On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que

$$u_n > 0$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que

$$u_{n+1} > 0$$

On a,

$$u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n > 0$$

comme somme de deux termes strictement positifs (en utilisant l'hypothèse de récurrence). D'où $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0}$$

- (b) Montrer alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 2u_n - u_n = u_n^2 + u_n > 0$$

en utilisant la question précédente. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

- (c) En déduire une contradiction à propos de P .

Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante (cf Question précédente), tous les termes de la suite sont 2 à 2 distincts. Or, on avait vu à la question 5 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P . On en déduit donc que P admet une infinité de racines. Donc

$$\boxed{P = 0}$$

Ce qui est absurde car P est supposé être un polynôme non constant. Donc $u_1 \notin]0, +\infty[$

Deuxième cas. On suppose que si $u_1 \in [-1, 0[$, alors on aboutit aussi à une contradiction.

10. Finalement, que vaut u_1 ?

D'après la question 8, on sait que $u_1 \in [-1, +\infty[$. Or, grâce à la question 9, on a montré que $u_1 \notin]0, +\infty[$ (car sinon on aboutit à une contradiction). De même l'énoncé nous dit que $u_1 \notin]-1, 0[$. Donc nécessairement, $u_1 = 0$.

11. En déduire que l'unique racine réelle de P est 0.

D'après la question précédente, on sait que $u_1 = 0$. Or $u_1 = f(u_0) = f(a)$. Ainsi,

$$a^2 + 2a = 0$$

c'est-à-dire $a = 0$ ou $a = -2$. Supposons par l'absurde que $a = -2$ est une racine de P . Alors, en évaluant (E) en -3 , on obtient,

$$P(8) = P(-4) \times P(-2) = 0$$

Ainsi, 8 est aussi une racine de P . Ainsi, si $u_0 = 8$, alors $u_1 = 64 + 16 > 0$ ce qui est en contradiction avec la question 9. Donc forcément $a = 0$. L'unique racine réelle de P est 0.

12. On admet que P n'admet pas de racine dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

D'après la question précédente, 0 est l'unique racine réelle. De plus, d'après l'énoncé, P n'admet pas de racine dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Donc 0 est l'unique racine complexe de P . Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$P = X^n$$

Ainsi, les seuls polynômes vérifiant (E) sont les polynômes constants $\boxed{P = 1}$ ou $\boxed{P = 0}$ et les polynômes non constants de la forme $\boxed{P = X^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.