

DM 7

À rendre pour le mardi 10 mars (facultatif)

Exercice 1 – Inclusion d'ensemble. On considère deux sous-ensembles F et G de $\mathbb{R}^2$, donnés par

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

On souhaite montrer que $F = G$ par double inclusion.

- Montrons que $F \subset G$.

Soit $(x, y) \in \underline{\hspace{2cm}}$. Montrons que $(x, y) \in \underline{\hspace{2cm}}$.

- Comme $(x, y) \in \underline{\hspace{2cm}}$, **on sait que**,

$\underline{\hspace{4cm}}$

- On veut **montrer que** $(x, y) \in \underline{\hspace{2cm}}$ donc, on veut montrer que

il existe $\underline{\hspace{2cm}}$ tel que $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

Posons $t = \underline{\hspace{2cm}}$. Alors,

$$(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Donc $(x, y) \in \underline{\hspace{2cm}}$.

- Montrons que $G \subset F$.

Soit $(x, y) \in \underline{\hspace{2cm}}$. Montrons que $(x, y) \in \underline{\hspace{2cm}}$.

- Comme $(x, y) \in \underline{\hspace{2cm}}$, **on sait que**,

il existe $\underline{\hspace{2cm}}$ tel que $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$

- On veut **montrer que** $(x, y) \in \underline{\hspace{2cm}}$ donc, on veut montrer que

$\underline{\hspace{4cm}}$

On a,

$$x + y = \underline{\hspace{2cm}}$$

Donc $(x, y) \in \underline{\hspace{2cm}}$.

Exercice 2 – Étude d'une fonction. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Écrire une fonction Python qui, étant donné un nombre x , renvoie la valeur de $g(x)$.
2. Justifier que g est continue sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$.
3. Montrer que g est continue en 0.
4. Donner la dérivée de g sur chacun de ces intervalles sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$.
5. On dit qu'une fonction f est dérivable en 0 si les deux limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}$$

La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

6. Donner la limite de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$.
7. Dresser le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$.
8. Tracer l'allure de la courbe de g sur $\mathbb{R}$.
9. (a) Montrer que la fonction g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
(b) En déduire que l'équation $g(x) = \frac{1}{3}$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$. *On admet que*

$$\frac{1}{e} > \frac{1}{3}$$

(c) La fonction g réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

10. Dans cette question, on s'intéresse à la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ définie par

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = \sum_{k=2}^n g(k)$$

- (a) Que vaut S_2 ? S_3 ?
- (b) Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de la somme partielle d'indice n , c'est-à-dire renvoie la valeur de S_n .
- (c) Donner une formule explicite pour la suite $(S_n)_{n \geq 2}$. *On pourra utiliser le fait que*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

- (d) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 2}$.