

DM 7

À rendre pour le mardi 10 mars (facultatif)

Exercice 1 – Inclusion d'ensemble. On considère deux sous-ensembles F et G de $\mathbb{R}^2$, donnés par

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

On souhaite montrer que $F = G$ par double inclusion.

- Montrons que $F \subset G$.

Soit $(x, y) \in F$. Montrons que $(x, y) \in G$.

- Comme $(x, y) \in F$, **on sait que**,

$$x + y = 0$$

- On veut **montrer que** $(x, y) \in G$ donc, on veut montrer que

$$\text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) = (t, -t)$$

Posons $t = x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$(x, y) = (x, -x) = (t, -t) \quad \text{car } x + y = 0$$

Donc $(x, y) \in G$.

- Montrons que $G \subset F$.

Soit $(x, y) \in G$. Montrons que $(x, y) \in F$.

- Comme $(x, y) \in G$, **on sait que**,

$$\text{il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) = (t, -t)$$

- On veut **montrer que** $(x, y) \in \underline{\hspace{1cm}}$ donc, on veut montrer que

$$x + y = 0$$

On a,

$$x + y = t + (-t) = 0$$

Donc $(x, y) \in F$.

Exercice 2 – Étude d’une fonction. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Écrire une fonction Python qui, étant donné un nombre x , renvoie la valeur de $g(x)$.

```
1 import numpy as np
2 def g(x):
3     if x < 0:
4         return 0
5     else:
6         return x*np.exp(-x)
```

2. Justifier que g est continue sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.

- Sur $]0, +\infty[$, la fonction g coïncide avec la fonction $x \mapsto x \exp(-x)$. Or, les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \exp(-x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc à fortiori sur $]0, +\infty[$. Donc, par produit, la fonction g est continue sur $]0, +\infty[$.
- Sur $] -\infty, 0[$, la fonction g coïncide avec la fonction $x \mapsto 0$, qui est continue sur $\mathbb{R}$ et donc à fortiori sur $] -\infty, 0[$.

Donc, la fonction g est continue sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.

3. Montrer que g est continue en 0.

Étudions la continuité en 0. On a

$$g(0) = 0 \times e^0 = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 = g(0)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-x} = 0 = g(0)$$

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$$

donc g est continue en 0.

4. Donner la dérivée de g sur chacun de ces intervalles sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$. De plus,

$$\boxed{\forall x < 0, \quad g'(x) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x > 0, \quad g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}}$$

5. On dit qu’une fonction f est dérivable en 0 si les deux limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}$$

La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

Regardons le taux d’accroissement en 0 à droite et à gauche.

- Le taux d’accroissement en 0 à droite est donné par

$$\forall x > 0, \quad \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{xe^{-x} - 0}{x - 0} = e^{-x}$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = e^{-0} = 1$$

- Le taux d'accroissement en 0 à gauche est donné par

$$\forall x < 0, \quad \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

la fonction g n'est pas dérivable en 0.

6. Donner la limite de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Par **croissances comparées**, on obtient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0.$$

Pour l'autre limite, on obtient directement que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0 = 0.$$

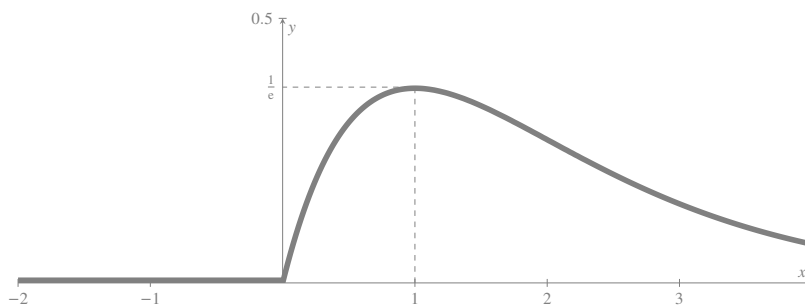
7. Dresser le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$.

On a vu à la question 4 que la fonction g était dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = (1 - x)e^{-x}.$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
g	0	$\frac{1}{e}$	0

8. Tracer l'allure de la courbe de g sur $\mathbb{R}$.



9. (a) Montrer que la fonction g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

Montrons que la fonction g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

- La fonction g est bien définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
- La fonction g est continue sur $[1, +\infty[$ (cf question 2).
- La fonction g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ (cf question 7).

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction g est bijective de $[1, +\infty[$ vers

$$J =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)] =] 0, \frac{1}{e}]$$

- (b) En déduire que l'équation $g(x) = \frac{1}{3}$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$. On admet que

$$\frac{1}{e} > \frac{1}{3}$$

D'après la question précédente, la fonction g est bijective de $[1, +\infty[$ vers $J =]0, \frac{1}{e}]$ et donc

$$\forall y \in]0, \frac{1}{e}], \exists ! x \in [1, +\infty[, y = g(x)$$

En particulier, pour $y = \frac{1}{3} \in]0, \frac{1}{e}]$ (car $\frac{1}{3} < \frac{1}{e}$), on obtient

$$\boxed{\exists ! x \in [1, +\infty[, \frac{1}{3} = g(x)}$$

- (c) La fonction g réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Il est vivement recommandé d'illustrer son raisonnement par une représentation graphique.

L'élément 0 admet deux antécédents -1 et -2 (il admet même une infinité d'antécédents). La

fonction g n'est donc pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et donc $\boxed{\text{pas bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$

10. Dans cette question, on s'intéresse à la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ définie par

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = \sum_{k=2}^n g(k)$$

- (a) Que vaut S_2 ? S_3 ?

Par définition,

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = \sum_{k=2}^n g(k)$$

Donc,

$$\boxed{S_2} = \sum_{k=2}^2 g(k) = g(2) \quad \boxed{= 2e^{-2}}$$

De même,

$$\boxed{S_3} = \sum_{k=2}^3 g(k) = g(2) + g(3) \quad \boxed{= 2e^{-2} + 3e^{-3}}$$

- (b) Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de la somme partielle d'indice n , c'est-à-dire renvoie la valeur de S_n .

```
1 def Somme(n):
2     S = 0
3     for k in range(2, n+1):
4         S = S + g(k)
5     return S
```

- (c) Donner une formule explicite pour la suite $(S_n)_{n \geq 2}$. On pourra utiliser le fait que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Soit $n \geq 2$. On a,

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=2}^n g(k) \\
 &= \sum_{k=2}^n k e^{-k} \\
 &= \sum_{k=2}^n k \times \left(\frac{1}{e}\right)^k \\
 &= \frac{1}{e} \sum_{k=2}^n k \times \left(\frac{1}{e}\right)^{k-1} \\
 &= \frac{1}{e} \left(\sum_{k=1}^n k \times \left(\frac{1}{e}\right)^{k-1} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Donc, en appliquant la formule de l'énoncé, on obtient,

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = \frac{1}{e} \left(\frac{n \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} - (n+1) \left(\frac{1}{e}\right)^n + 1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} - 1 \right)$$

(d) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 2}$.

Comme $-1 < \frac{1}{e} < 1$, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$$

De plus, par croissances comparées,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$$

Ainsi, en passant à la limite dans l'égalité de la question précédente, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{e} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} - 1 \right)$$