# TD 03 – Nombres complexes : étude algébrique

## 1 Nombres complexes sous forme algébrique

**Exercice 1 – Opérations sur les nombres complexes.** On pose $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = -2 + 4i$. Effectuer les calculs suivants. *On donnera le résultat sous forme algébrique.*

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $4z_1$ d) $z_1 \times z_2$

e) $z_1^2$ f) $\frac{1}{z_1}$ g) $\frac{z_1}{z_2}$

**Exercice 2 –** Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $-(-2+5i)(-1-i)$ b) $(2+3i)^2 - (i-1)^2$

c) $-\frac{1}{i}$ d) $\frac{1}{2-i}$

e) $\frac{3-5i}{1+i}$ f) $(1+i)^2$

g) $(1+i)^7$ h) $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$

**Exercice 3 – Les puissances de $i$.** Simplifier les nombres complexes $i^2$, $i^3$, $i^4$, $i^7$ et $i^{2025}$.

**Exercice 4 – Parties réelle/imaginaire.** Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants

a) $\frac{3+2i}{4}$ b) $i^3$ c) $\frac{1}{i}$

d) $\frac{1}{1+2i}$ e) $\frac{1+i}{2i-3}$

**Exercice 5 – Unicité de la forme algébrique.**

1. Soit $z = x + 2 + i(-ix + x) + 2i - 5ix$ avec $x \in \mathbb{R}$. À quelle(s) condition(s) sur $x \in \mathbb{R}$, $z$ est-il un nombre réel ? un imaginaire pur ?
2. Soient $z = a^2 - a - 2 + 3ia$ et $z' = -2a + i(a^2 + a + 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$. À quelle(s) condition(s) sur $a \in \mathbb{R}$ a-t-on $z = z'$ ?

**Exercice 6 – Équations dans $\mathbb{C}$.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

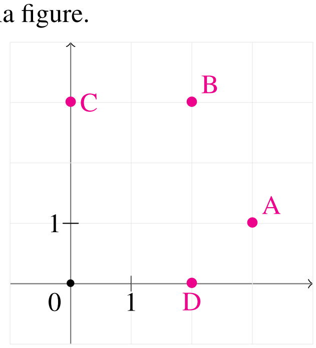
a) $(7-3i)\bar{z} - 2 + i = 0$

b) $2\bar{z} + 5 - 2i = 4 + i + 3\bar{z}$

c) $(1+i)z + (2-i)\bar{z} = 1 - 2i$

d) $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 1$

**Exercice 7 – Représentation géométrique d'un nombre complexe.** Donner l'affixe de chacun des points du plan représentés sur la figure.




**Exercice 8 – Représentation géométrique d'un nombre complexe.** Représenter sur le plan l'image de chacun des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = 1 + 2i$ b) $z_2 = -1 + 2i$

c) $z_3 = 4$ d) $z_4 = i$

**Exercice 9 – Conjugué.** Donner le conjugué des nombres complexes suivants. *On donnera le résultat sous forme algébrique.*

a) $5 - 6i$ b) $5i$ c) $5$

d) $\frac{1}{i}$ e) $(1+i)^2$ f) $\frac{2}{2+i}$

**Exercice 10 – Conjugué.** Donner le conjugué des nombres complexes suivants. *On ne donnera pas le résultat sous forme algébrique.*

a) $i(2-i)$ b) $\frac{1-i}{1+i}$ c) $i(4-2i)^3$

d) $\frac{i\sqrt{3}}{1+6i}$ e) $(3-2i)(4i-1)$ f) $\frac{z(1-i\bar{z})}{2z-4i\bar{z}}$

**Exercice 11 –** Soit $z \in \mathbb{C}$. Parmi les nombres suivants, lesquels sont réels ? imaginaires purs ? *On pourra s'aider du calcul du conjugué pour répondre à ces questions.*

a) $1 - z\bar{z}$ b) $z + \bar{z}$ c) $z^2 - \bar{z}^2$

d) $\frac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}}$ e) $(z - i\bar{z})(z + i\bar{z})$ f) $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$

**Exercice 12 – Calculs de module.** Déterminer le module des nombres complexes suivants.

a) $\frac{5}{2}i$ b) $-3$

c) $-4i$ d) $1+i$

e) $1 - i\sqrt{3}$ f) $\sqrt{3} + i\sqrt{2}$

g) $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ h) $\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$

i) $(3+2i)^5$ j) $(i-1)(i-3)(i-5)$

k) $\frac{7}{(2-i)^2}$ l) $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$

**Exercice 13 – Lien conjugué/module pour un nombre complexe de module 1.** Soient $a$ et $b$ deux nombres complexes de *module 1* : $|a| = 1$ et $|b| = 1$ avec $a \neq b$. Montrer que

$$Z = \frac{a+b}{a-b} \in i\mathbb{R}$$

**Exercice 14 – Représentation géométrique.** Représenter l'ensemble des points $M$ dont l'affixe $z$ vérifie

a) $|z| = 4$ b) $|z-3i| \geq 5$

c) $|z-1+i| \leq \frac{3}{2}$ d) $\mathrm{Re}(z) \geq 1$ et $\mathrm{Im}(z) \geq 1$

**Exercice 15 – Utilisation de l'inégalité triangulaire.** Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que

$$|1+a| + |a+b| + |b| \geq 1.$$

## 2 Équations algébriques

**Exercice 16 – Racines carrées complexes.** Déterminer sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants.

a) $9$ b) $-17$

c) $3+4i$ d) $7+24i$

**Exercice 17 – Introduction à la factorisation de polynôme.** Déterminer de tête les valeurs des paramètres $a$ et $b$ pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) $2x^2+7x+6 = (x+2)(ax+b)$
b) $-4x^2+4x-1 = (2x-1)(ax+b)$
c) $-3x^2+14x-15 = (x-3)(ax+b)$
d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x-5)(ax+b)$

**Exercice 18 – Factorisation de polynôme.** Soit $m \in \mathbb{R}^*$. Sans calcul de discriminant, factoriser les polynômes suivants et en déduire les racines.

a) $x \mapsto 3x^2-14x+8$ sachant que 4 est racine
b) $x \mapsto 7x^2+23x+6$ sachant que $-3$ est racine
c) $x \mapsto mx^2+(2m+1)x+2$ sachant que $-2$ est racine
d) $x \mapsto x^2-4x-12$ en trouvant une racine évidente
e) $x \mapsto 3x^2+4x+1$ en trouvant une racine évidente
f) $z \mapsto z^2-2iz-1+2i$ en trouvant une racine évidente

**Exercice 19 – Équations du second degré dans $\mathbb{C}$.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $z^2+z+5=0$
b) $z^2-\sqrt{3}z-i=0$
c) $2z^2-7z+3=0$
d) $z^2-(6+i)z+11+13i=0$
e) $4z^2-z+4=0$
f) $iz^2+(-3+4i)z-5+i=0$

**Exercice 20 – Relations coefficients-racines.** Trouver *sans calculs* les solutions des équations de degré deux suivantes.

a) $x^2+8x+15=0$
b) $x^2+18x+77=0$
c) $x^2-8x-33=0$

## 3 Approfondissement

**Exercice 21 – Factorisation de polynôme.** Factoriser les polynômes suivants :

a) $x \mapsto x^3-x^2-2x+8$

b) $x \mapsto x^3+5x^2-12x+6$

**Exercice 22 – Équation de degré trois.** On considère l'équation (E) suivante :

$$z^3+(1+i)z^2+(4-i)z+12-6i=0$$

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle.
2. En déduire toutes les solutions de (E).

**Exercice 23 –** Déterminer puis représenter l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\frac{z+1}{z-1} \text{ soit imaginaire pur}$$

**Exercice 24 –**

1. Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes tels que $1+zz \neq 0$, $|z|=1$ et $|z'|=1$. Montrer que

$$\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|=1$ et $z \neq 1$. Montrer que

$$i\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$$

**Exercice 25 –** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+z^2-6=0$.

**Exercice 26 –** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u|=1$. Montrer que $|x-u| = |1-xu|$.

**Exercice 27 –**

1. Montrer l'identité du parallélogramme: pour tout $u,v \in \mathbb{C}$,

$$|u+v|^2+|u-v|^2 = 2(|u|^2+|v|^2).$$

2. En donner une interprétation géométrique.

**Exercice 28 – Oral TSI CCINP 2012.** Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$. Le point $A$ est le point d'affixe $z_A = 1+i\sqrt{3}$. On note $I$ le milieu du segment $[OA]$.

1. Déterminer l'affixe du point $I$.
2. Montrer que l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $|z| = |z-z_A|$ est une droite passant par $I$.
3. On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\bar{z}+1+i\sqrt{3}$$

   (a) Calculer $f(0)$, $f(z_A)$ et $f(z_I)$.
   (b) Montrer que,

$$\forall z_1,z_2 \in \mathbb{C}, \ \ |f(z_1)-f(z_2)| = |z_1-z_2|$$