

25. Probabilités sur un univers fini

1 Expériences aléatoires – Événements

1.1 Définition

Définition 1.1 — Expérience aléatoire – Univers. Une **expérience aléatoire** est une expérience vérifiant les deux conditions suivantes.

1. Elle comporte plusieurs résultats possibles, appelés **issues**.
2. On ne peut pas prévoir l'issue avant d'avoir réalisé l'expérience.

L'ensemble des issues de l'expérience est appelé l'**univers**, il est noté généralement Ω .



Lors de la description d'une expérience aléatoire, l'univers des possibles n'est pas toujours précisé. L'étude d'une expérience aléatoire commence donc souvent par la **description de l'ensemble des résultats possibles**, appelée *modélisation*.

Exemple 1.2

Expérience	Résultats possibles	Univers
On lance un dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure.		
On lance une fois pile équilibrée qui donne Pile ou Face.		
On lance deux dés discernables, et on regarde le numéro de chaque dé, que l'on note sous la forme d'un couple.		
On lance deux dés discernables, et on s'intéresse à la valeur de la somme des deux dés.		
On considère une urne contenant 1 boule blanche et 3 boules bleues. On tire au hasard deux boules successivement dans l'urne avec remise. On s'intéresse au nombre de boules blanches obtenues.		
On considère une urne contenant 1 boule blanche et 3 boules bleues. On tire au hasard deux boules successivement dans l'urne sans remise. On s'intéresse au nombre de boules blanches obtenues.		

Dans la suite de ce chapitre, Ω désignera l'univers d'une expérience aléatoire. De plus, on supposera Ω **fini** (c'est-à-dire qu'il existe un nombre **fini** d'issues) et non vide. Il sera donc de la forme $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Définition 1.3 — Évènement. Un **évènement** est une partie de l'univers, c'est-à-dire un sous-ensemble de l'ensemble Ω . L'ensemble des évènements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$. On peut distinguer certains évènements en particulier. On dit que l'évènement A est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à A .

- Ω est l'**évènement certain**.
- $\emptyset$ est l'**évènement impossible**.
- Tout évènement de la forme $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$ est une des issues de l'expérience, est appelé **évènement élémentaire**.

Exemple 1.4 On lance un dé, et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. On rappelle que $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

Evènement	Ensemble	Type d'évènement
« on obtient 5 »		
« on obtient 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 »		
« on obtient 7 »		
« on obtient un nombre pair »		

1.2 Opérations sur les événements

Définition 1.5 Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire d'univers Ω .

- ▷ L'évènement « A **ou** B » est l'évènement qui a lieu lorsqu'au moins un des deux événements A et B a lieu. Il s'agit de l'ensemble $A \cup B$.
- ▷ L'évènement « A **et** B » est l'évènement qui a lieu lorsque les deux événements A et B sont réalisés. Il s'agit de l'ensemble $A \cap B$.
- ▷ L'évènement **contraire de** A est l'évènement qui a lieu exactement lorsque l'évènement A n'a pas lieu. Il s'agit de l'ensemble $\bar{A}$.

Les notions d'intersection et d'union peuvent se généraliser à un nombre fini quelconque d'ensembles comme expliqué ci-dessous.

Définition 1.6 Soit $(A_1, A_2, \dots, A_r)$ une famille d'événements d'une expérience aléatoire. Alors

- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r$ est l'évènement « Au moins un des A_k , pour $1 \leq k \leq r$, est réalisé »
- $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r$ est l'évènement « Tous les A_k , pour $1 \leq k \leq r$, sont réalisés »

Exemple 1.7 Les questions sont indépendantes.

1. On note A : « la carte tirée est un trèfle » et B : « la carte tirée est un as ». Décrire par une phrase la réunion de ces deux événements.
2. On note C : « la carte tirée est un carreau » et D : « la carte tirée est un roi ». Décrire par une phrase l'intersection de ces deux événements.
3. On note E : « le lancer de dé donne un nombre pair ». Décrire par une phrase l'évènement contraire.
4. On note F : « le lancer du dé donne 1 » et G : « le lancer du dé donne un nombre pair ». Décrire par une phrase l'intersection de ces deux événements.

On retrouve les propriétés vues sur les ensembles, dont on rappelle les principales.

Proposition 1.8 Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et A, B, C trois événements.

- On a $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$ (commutativité).
- On a $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité).
- On a $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité).
- On a $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
- On a $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (loi de Morgan).

Visualisation graphique.

Exemple 1.9 On lance un dé, et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. On rappelle que $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

Évènement	Opération	Ensemble
A « on obtient un nombre impair »		
B « on obtient 2 »		
$A \cup B$		
$A \cap B$		
$\bar{A}$		

Exemple 1.10 On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules rouges. On note, pour tout $k \in \{1, 2\}$, R_k l'évènement «Obtenir une boule rouge au k -ième lancer». Décrire les événements suivants en fonction de R_1 et R_2 .

- L'évènement A «La deuxième boule tirée est rouge»
- L'évènement B «La première boule tirée est blanche»
- L'évènement C «On tire deux boules rouges»

- L'évènement D «On tire au moins une boule blanche»

Exemple 1.11 On lance dix fois une pièce équilibré. On note pour tout $k \in \{1, \dots, 10\}$, P_k l'évènement «Obtenir Pile au k -ième lancer». Décrire les évènements suivants en fonction des $(P_k)_{k=1, \dots, 10}$.

- L'évènement A_1 «On obtient Face au premier tirage»
- L'évènement A_2 «On obtient que des Pile»
- L'évènement A_3 «On obtient au moins une fois Face»
- L'évènement A_4 «On obtient Pile pour la première fois au troisième lancer»
- L'évènement A_5 «On obtient Pile pour la première fois au troisième lancer et Face pour la première fois au quatrième lancer»

Définition 1.12 Deux évènements A et B sont dits incompatibles (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 1.13 On tire un dé à six faces. Dire si les évènements suivants sont incompatibles.

Evénement	Incompatibles ?	$\cap$?
A « On obtient un num pair » et B « On obtient un num impair »		
A « On obtient un num pair » et B « On obtient un multiple de 3 »		
A « On obtient un num pair » et B « On obtient un num ≥ 3 »		

1.3 Système complet d'événements

Définition 1.14 — Système complet. On appelle **système complet d'événements** (ou **partition** de l'univers) un ensemble d'événements qui sont deux à deux disjoints et dont la réunion forme l'univers. Autrement dit, si $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une famille d'événements, alors $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est un **système complet d'événements** lorsque :

1. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$,
2. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

? Un système complet d'événements est donc une façon de ranger/découper tout l'univers, sans faire de double compte.

Exemple 1.15 On lance (encore) un dé, et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Les familles suivantes forment-elles un système complet d'événements ?

1. La famille $(A_1, A_2, \dots, A_6)$ où, pour tout $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, A_i « On obtient le numéro i » ?
2. La famille (A, B) où A « On obtient un nombre pair » et B « On obtient un nombre impair » ?
3. La famille (A, A_1, A_3, A_5) ?
4. La famille (A, A_1, A_3) ?
5. La famille (B, A_1, A_2, A_4, A_6) ?

Exemple 1.16 Une urne contient trois boules noires numérotées de 1 à 3 et deux boules blanches numérotées de 1 à 2. On tire une boule au hasard. Les familles suivantes forment-elles un système complet d'événements ?

1. La famille (A_1, A_2, A_3) où, pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, A_i « On obtient une boule numérotée i » ?
2. La famille (N, B) où N « On obtient une boule noire » et B « On obtient une boule blanche » ?
3. La famille (C, D) où C « On obtient la boule noire numéro 1 » et D « On n'obtient pas la boule noire numéro 1 » ?

Proposition 1.17 Soit A un événement. Alors $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.

Visualisation graphique.

1.4 Résumé sur le vocabulaire

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire des probabilités	Exemple avec le dé
L'ensemble	L'univers	
Un élément	Une issue	
Un singleton	Un évènement élémentaire	
Une partie	Un évènement	
L'ensemble vide	L'évènement impossible	
Partition	SCE	

Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire des probabilités
Le complémentaire	L'évènement contraire
$A \cap B$	« A et B »
$A \cup B$	« A ou B »
$A \cap B = \emptyset$	« A et B incompatibles »

2 Probabilité sur un ensemble fini

2.1 Notion de probabilité – Espace probabilisé fini

On rappelle que Ω est un ensemble **fini** et non vide. L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω .

Définition 2.1 On appelle **probabilité sur Ω** toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ vérifiant :

1. Pour tout évènement A , $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Pour tout couple (A, B) d'évènements incompatibles, c'est-à-dire tels que $A \cap B = \emptyset$, on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Pour tout évènement A , le réel $P(A)$ est appelé **probabilité de A** . Le couple (Ω, P) est alors appelé **espace probabilisé fini**. Pour la suite du chapitre, on suppose qu'une probabilité P est donnée sur Ω .

Visualisation graphique du point 3.



Attention, le «probabilité» est souvent utilisé de deux manières différentes qu'il convient de bien distinguer.

- La probabilité de A est le **réel** $P(A)$ (compris entre 0 et 1) qu'on associe à l'évènement A pour mesurer sa vraisemblance.
- La probabilité P est l'**application** qu'on choisit pour mesurer la vraisemblance de tous les évènements de Ω .

La propriété 3. de la définition précédente peut se généraliser à un nombre quelconque fini d'ensembles incompatibles.

Proposition 2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour toute famille finie $(A_1, \dots, A_n)$ d'évènements **deux à deux incompatibles** c'est-à-dire que pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, on a :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \quad (\sigma\text{-additivité})$$

Proposition 2.3 Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ des évènements.

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.
4. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Exemple 2.4 On lance une fois un dé (truqué) à six faces. Supposons que cette expérience aléatoire soit munie de la probabilité suivante :

k	1	2	3	4	5	6
$P(\{k\}) = P(D_k)$	0.2	0.05	0.3	0.05	0.3	0.1

On a noté, pour tout $k \in \{1, \dots, 6\}$, D_k l'évènement «Obtenir le numéro k ». Quelle est la probabilité de l'évènement A «Obtenir un nombre pair»? Quelle est la probabilité de l'évènement B «Obtenir un nombre impair»

Proposition 2.5 — Formule du crible ou Formule de Poincaré (HP). Pour tous évènements A et B , on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Visualisation graphique.

Exemple 2.6 Dans une entreprise, 38% des employés parlent anglais, 12% parlent espagnol et 5% parlent anglais et espagnol. Quel est le pourcentage d'employés qui parlent anglais ou espagnol? En déduire le pourcentage des employés qui ne parlent aucune de ces deux langues.

3 Distribution de probabilités

Définition 3.1 Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini. On appelle **distribution de probabilité sur Ω** toute famille d'éléments $(p_1, \dots, p_n)$ positifs telle que

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Proposition 3.2 Soient $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un univers fini et $(p_1, \dots, p_n)$ une distribution de probabilités sur Ω . Alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$ et donc

$$\sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = 1.$$

De plus, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.

Ce résultat nous dit qu'une probabilité est entièrement déterminée par la connaissance des probabilités des événements élémentaires.

Exemple 3.3 Soit P une probabilité sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Supposons que :

ω	1	2	3	4
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	

Calculer $P(\{4\})$.

Exemple 3.4 On lance un dé à six faces. On suppose que la face 1 tombe avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et que les autres faces tombent toutes avec la même probabilité p . Que vaut p ?

4 Exemple fondamental : la probabilité uniforme

On cherche à construire une probabilité pertinente dans le cas d'une situation d'*équiprobabilité*, c'est-à-dire lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité (aucun événement n'est favorisé). On repère une telle hypothèse dans un énoncé soit explicitement lorsque le mot «équiprobable», soit implicitement lorsqu'il est dit que le dé est équilibré, que la pièce est non truquée, que les boules tirées sont indiscernables au toucher...

Exemple 4.1 Dire si les situations suivantes correspondent à de l'équiprobabilité.

Situation	Issues	Equiproba. ?
On tire un dé équilibré à six faces		
On lance une pièce dont la proba d'avoir face est $\frac{3}{4}$		
Tirages de 10 boules indiscernables numérotées		
Mme B. fait un exo de maths. On veut savoir s'il est juste ou pas.		

Proposition 4.2 — Probabilité uniforme. L'application

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

$$A \longmapsto P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues réalisant l'évènement } A}{\text{nombre total d'issues}}.$$

est une probabilité sur Ω , appelée **probabilité uniforme sur Ω** .

Exemple 4.3 On lance un dé à 6 faces équilibré, et on regarde la valeur obtenue sur la face supérieure. L'univers des possibles associé à cette expérience est $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$. On munit Ω de la probabilité uniforme.

Évènement	Ensemble	Probabilité
« On obtient 1 »		
« On obtient 7 »		
« On obtient 3 »		
« On obtient un nombre pair »		
« On obtient un nombre impair plus petit que 4 »		

Exemple 4.4 On réalise trois tirages successifs (avec ordre) et avec remise dans une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules jaunes. On munit cette expérience de la probabilité uniforme. Déterminer la probabilités de l'évènement suivant

A : « Tirer une boule rouge puis une jaune puis une jaune (dans cet ordre) »

5 Probabilités conditionnelles

5.1 Définition

On choisit une personne au hasard. On note A l'évènement « la personne choisie parle islandais » et B l'évènement « la personne choisie est islandaise ». Il est assez clair que les probabilités $P(A)$ et $P(B)$ sont plutôt proches de 0. Par contre, on a envie de dire que la probabilité de A sachant B est assez élevée. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle.

Proposition 5.1 Soit A un évènement non négligeable ($P(A) > 0$). L'application

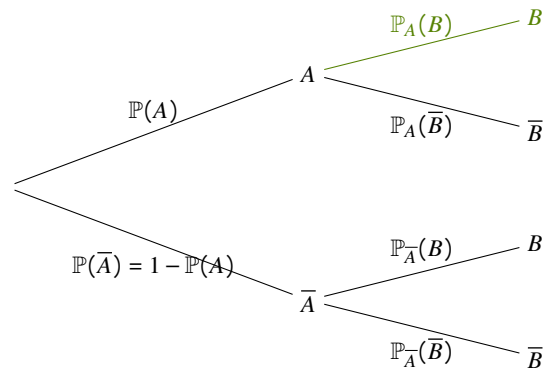
$$P_A : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

$$B \longmapsto P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

est une probabilité sur Ω . Pour tout évènement B , le réel $P_A(B)$ (aussi noté $P(B | A)$) est appelé **probabilité (conditionnelle) de B sachant A**.



Sur un arbre des probabilités, la probabilité $\mathbb{P}_A(B)$ correspondant non pas à une branche entière mais à une branche «tronquée» (on change le point de départ de l'expérience).



Exemple 5.2 Un virus touche 1% de la population. Un laboratoire fournit un test pour lequel 98% des malades sont positifs et 96% des personnes saines sont négatives. On note M l'événement « être malade » et P l'événement « être détecté positif ». Traduire les hypothèses de l'énoncé en terme de probabilité et faire l'arbre de probabilité associé.

Exemple 5.3 Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne. Déterminons la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage sachant que l'on a tiré une boule noire au premier tirage. Notons N_i l'événement « obtenir une boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

Exemple 5.4 On lance deux dés (numérotés de 1 à 6). Quelle est la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit 6, sachant que le premier dé a donné un chiffre pair ? On munit cette expérience de la probabilité uniforme.

5.2 Formule des probabilités composées

La formule des **probabilités composées** permet de calculer la probabilité d'une **intersection** lorsque les évènements en jeu ne sont **pas indépendants** (cf Section 6).

Proposition 5.5 — Formule des probabilités composées.

1. Si A et B sont deux évènements, avec $P(A) \neq 0$, alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

2. Si A et B sont trois évènements, avec $P(A \cap B) \neq 0$, alors

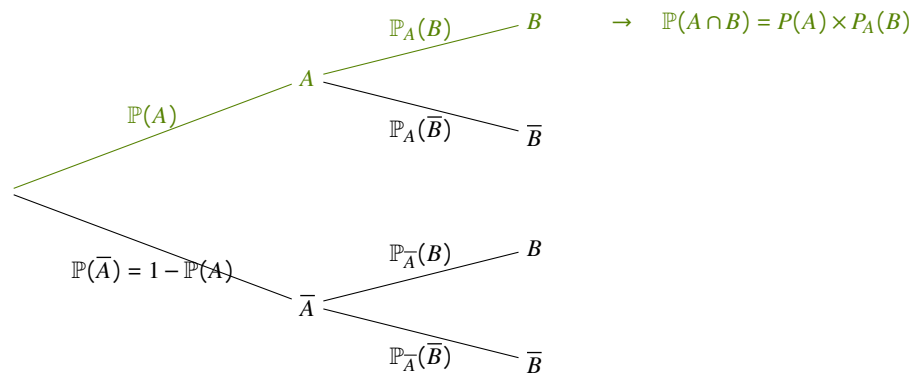
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C)$$

3. De manière générale, soient $A_1, \dots, A_p$ des évènements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{p-1}) \neq 0$. Alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^p A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{p-1}}(A_p).$$

Par convention, si $P(A) = 0$, on pose $P(A)P_A(B) = 0$. On ne demande donc pas dans ces formules de vérifier que les probabilités conditionnelles sont bien définies.

! Autrement dit, sur un arbre de probabilité, la probabilité qu'un chemin se réalise est le produit des probabilités de toutes les branches qui le composent. Sur un arbre des probabilités, il faut bien faire attention à distinguer la probabilité de l'intersection de A et B, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et de la probabilité de B sachant A, $\mathbb{P}_A(B)$.



Exemple 5.6 Un virus touche 1% de la population. Un laboratoire fournit un test pour lequel 98% des malades sont positifs et 96% des personnes saines sont négatives. On note M l'événement « être malade » et P l'événement « être détecté positif ». Calculer la probabilité qu'une personne soit malade et testée négative.

Exemple 5.7 On considère une urne qui contient initialement deux boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs (avec ordre) de la manière suivantes.

- Lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
- Lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, N_k l'évènement "On obtient une boule noire au k -ième tirage" et Y l'évènement "On obtient pour la première fois une boule blanche au 3-ième tirage". Déterminer la probabilité de Y .

5.3 Formule des probabilités totales

Proposition 5.8 — Formule des probabilités totales. Soient B un évènement et $A_1, \dots, A_n$ un système complet d'évènements, avec pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(A_k) \neq 0$, on a

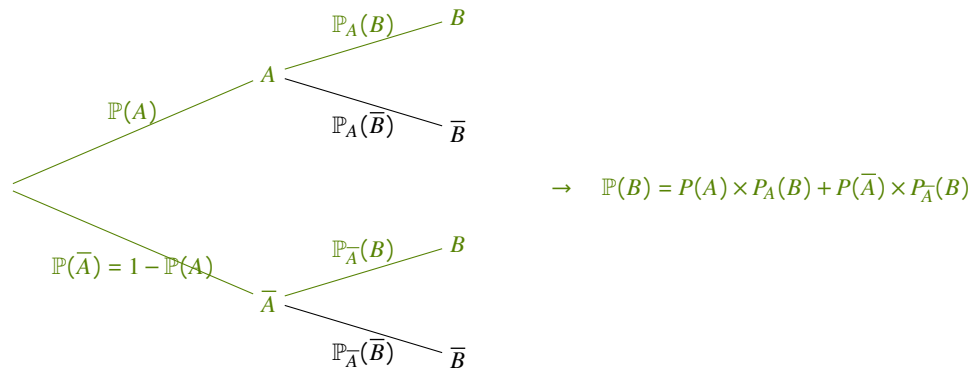
$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P_{A_k}(B)$$

Preuve visuelle.





Autrement dit, sur un arbre de probabilité, la probabilité qu'un évènement se réalise est la somme des chemins qui le réalisent.



On utilise souvent la formule des probabilités totales dans le cas suivant.

Proposition 5.9 Soient A et B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$. Alors, en considérant le système complet d'événements $(A, \bar{A})$,

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$$

Exemple 5.10 Un virus touche 1% de la population. Un laboratoire fournit un test pour lequel 98% des malades sont positifs et 96% des personnes saines sont négatives. On note M l'évènement « être malade » et P l'évènement « être détecté positif ». Calculer la probabilité qu'une personne ait un test positif.

Exemple 5.11 Chaque soir, un étudiant travaille soit les maths, soit la physique (mais pas les deux...). S'il a travaillé les maths, il travaille à nouveau les maths le lendemain avec probabilité $3/4$. S'il a travaillé la physique, il travaille à nouveau la physique le lendemain avec probabilité $1/2$. On suppose que le premier soir, il travaille les maths. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note M_n l'événement « l'étudiant a travaillé les maths le $n^{\text{ème}}$ soir » et $p_n = P(M_n)$. Déterminons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de p_n .

5.4 Formule de Bayes

Proposition 5.12 — Formule de Bayes. Si A et B sont des événements de probabilités non nulles, alors

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

Démonstration. On a,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

■



Cette formule est aussi appelée *formule des probabilités des causes* car elle permet de « remonter le temps » : lorsque l'événement B est observé après l'événement A , on peut interpréter A comme une cause et B comme une conséquence. La formule de Bayes répond alors à la question « si une telle conséquence a été observée, quelle est la probabilité que telle cause ait eu lieu ? »

Exemple 5.13 Un groupe d'amis souhaite passer la soirée dans l'une des trois discothèques valables de Biarritz qu'ils choisissent au hasard. Dans la discothèque *Pipeline*, l'animateur passe du reggae avec une probabilité $1/4$, dans la discothèque *Mundaka*, l'animateur en passe avec une probabilité $4/10$ et dans la discothèque *JBay*, avec une probabilité $3/10$.

1. Quelle est la probabilité d'aller dans la discothèque *Pipeline* ou dans la discothèque *JBay* ?
2. Quelle est la probabilité de ne pas aller dans la discothèque *Pipeline* ?
3. Quelle est la probabilité d'aller dans la discothèque *Pipeline* et d'entendre du reggae ?
4. Quelle est la probabilité que lors de leur soirée, le groupe d'amis entende du reggae ?
5. Quelle est la probabilité que le groupe d'amis ait choisi la discothèque *Mundaka* sachant qu'en entrant dans la discothèque choisie, il ont entendu du reggae.

On pourra utiliser les notations suivantes.

P_i : « Les amis sortent au *Pipeline* »

J : « Les amis sortent au *JBay* »

M : « Les amis sortent au *Mundaka* »

R : « Un titre de reggae est diffusé »

6 Indépendance

6.1 Indépendance de deux événements

Définition 6.1 Deux événements A et B sont dits **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

autrement dit, si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ lorsque

$$P_B(A) = P(A) \quad \text{ou} \quad P_A(B) = P(B).$$

La notion d'indépendance n'est pas toujours intuitive.

Exemple 6.2 Dans un jeu de 32 cartes, montrer que les événements A « Tirer un roi » et B « Tirer un pique » sont indépendants.

Exemple 6.3 Prenons un jeu usuel de 32 cartes dont on retire la dame de coeur. Montrer que les événements A « Tirer un roi » et B « Tirer un pique » ne sont pas indépendants.

Proposition 6.4 Soient A et B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Si A et B sont indépendants alors A et $\bar{B}$ le sont aussi (ainsi que $\bar{A}$ et B , et $\bar{A}$ et $\bar{B}$).

Souvent, on ne démontre pas l'indépendance mais l'énoncé le dit clairement ou le suggère.

Exemple 6.5 Dire si les événements suivants sont indépendants dans la situation décrite.

1. On lance deux fois un dé à six faces. On note A « obtenir 4 avec le premier lancer » et B « obtenir 2 avec le second lancer ».
2. On effectue deux tirages avec remise dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules jaunes. On note A « obtenir une boule rouge au premier tirage » et B « obtenir une boule rouge au deuxième tirage ».
3. On effectue deux tirages sans remise dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules jaunes. On note A « obtenir une boule rouge au premier tirage » et B « obtenir une boule rouge au deuxième tirage ».

6.2 Indépendance deux à deux et mutuelle

Définition 6.6 Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements.

1. On dit que les événements A_i sont **deux à deux indépendants** si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

2. Les événements A_i sont dits **mutuellement indépendants** lorsque, pour toute partie I de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$



Par exemple,

1. A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants si

2. A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si et seulement si :

Les deux notions sont donc distinctes : des événements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse.

Exemple 6.7 On lance successivement deux pièces de monnaie et on définit A « obtenir Pile au premier lancer », B « obtenir Face au deuxième lancer », C « obtenir le même résultat aux deux lancers ». Montrer que les événements A , B et C sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Proposition 6.8 Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. Si $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors, si on pose, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$, les événements $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

En pratique, on considère (sans le prouver) que des événements sont indépendants quand les conditions de l'expérience le justifient. Par exemple, on lance plusieurs fois une pièce, un dé, on effectue des tirages successifs avec remise... Dans ces situations, les événements impliquant des tirages distincts pourront être supposés indépendants.

Exemple 6.9 On lance trois fois (tirage avec ordre) une pièce non truquée. On note, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, P_k l'évènement "Obtenir Pile au k -ième lancer»

1. Quelle est la probabilité d'obtenir Face au premier tirage ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir Face au premier tirage et Pile au deuxième tirage ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir que des Pile lors des trois lancers ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un Pile lors des trois lancers ?

7 Quelle formule et quand ?

- **Calculer la probabilité d'un contraire** – *Ou quand l'évènement est associé à une négation/comporte le mot «pas».*

- Par passage au complémentaire, on a

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

- **Calculer la probabilité d'une intersection** – *Ou quand l'évènement comporte le mot «tous».*

- Intersection finie de deux évènements indépendants :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- Intersection finie d'évènements mutuellement indépendants :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k).$$

- Intersection finie d'évènements (non nécessairement indépendants) : en utilisant la formule des probabilités composées,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

- **Calculer la probabilité d'une union** – *Ou quand l'évènement comporte le mot «au moins».*

- Union de deux ou trois évènements (non nécessairement incompatibles) : formule de Poincaré

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- Union finie d'évènements deux à deux incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

- Union finie d'évènements mutuellement indépendants : leurs contraires sont aussi mutuellement indépendants et

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^n P(\bar{A}_k) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P(A_k))$$

- **Calculer la probabilité d'un évènement dépendant du passé** – *Ou quand l'énoncé comporte une disjonction de cas avec l'idée d'une temporalité*

- En utilisant la formule des probabilités totales, on a,

$$P(B) = \sum_{n=0}^N P(A_n)P_{A_n}(B)$$

- **Calculer la probabilité d'un évènement du passé sachant le futur**

- En utilisant la formule de Bayes, on a,

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$