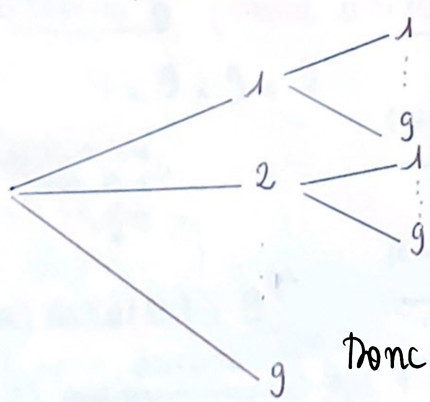
## Exercice 7

- Tirage avec remise (ordre)




⋆ card $\Omega = 9 \times 9 = 81$

⋆ card ("les deux pairs") $= 4 \times 4$

⋆ card ("les deux impairs") $= 5 \times 5$

Donc P("obtenir 2 num pairs") $= \dfrac{4 \times 4}{9 \times 9} = \dfrac{16}{81}$

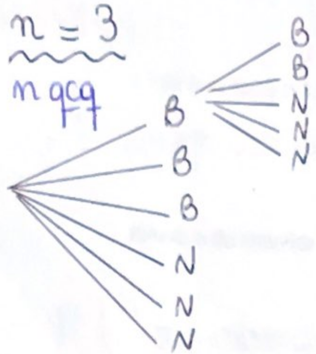
Donc P ("même parité") $= \dfrac{16}{81} + \dfrac{25}{81} = \dfrac{41}{81}$

car union disjointe

## Exercice 8 (Proba uniforme)

∘ $n = 3$

$n$ qcq




$\star$ card $\Omega = 6 \times 5 \times 4$ $\quad 2n(2n-1) \times \dots \times (n+1)$

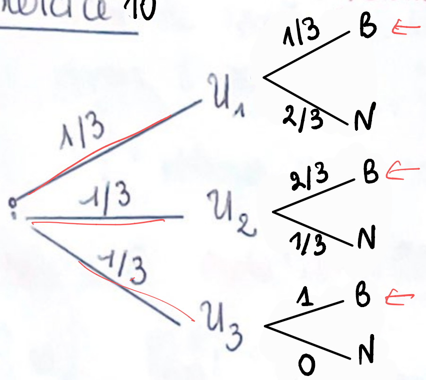
$\star$ card("3 boules noires") $= 3 \times 2 \times 1$

$n \times (n-1) \times \dots \times 1$

$$P(\text{"3 boules noires"}) = \frac{3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{20}$$

$$= \frac{n!}{2n \times \dots \times (n+1)} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

## Exercice 10 (Formule des proba totales) Formule de Bayes




4 ∘ Formule des proba totales :

$$P(B) = P(U_1)P_{U_1}(B) + P(U_2)P_{U_2}(B) + P(U_3)P_{U_3}(B)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{3}$$

$$= \frac{6}{9}$$

$$= \frac{2}{3}$$

1. $P(U_1) = 1/3$ (proba uniforme)
2. $P_{U_1}(B) = 1/3$ (proba uniforme)
3. $P(U_1 \cup U_2) = P(U_1) + P(U_2)$ car les évènements sont incompatibles
$= 1/3 + 1/3$
$= 2/3$

5. Retour en arrière → Formule de Bayes

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1) P_{U_1}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} \text{ (q exo 1)}} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

## Exercice 9 (Proba uniforme)

1∘ $\underbrace{9}_{\text{possibilité pour le 1er chiffre}} \times 9 \times 9 \times 9$ ...

2∘a) card$(\Omega) = 9^4$

card("~~au moins une fois~~ aucun 7")

$= 8 \times 8 \times 8 \times 8$

⚠ "au moins" regarder l'évènement contraire

. $P(\bar{A}) = \frac{8^4}{9^4}$

. $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{8^4}{9^4}$

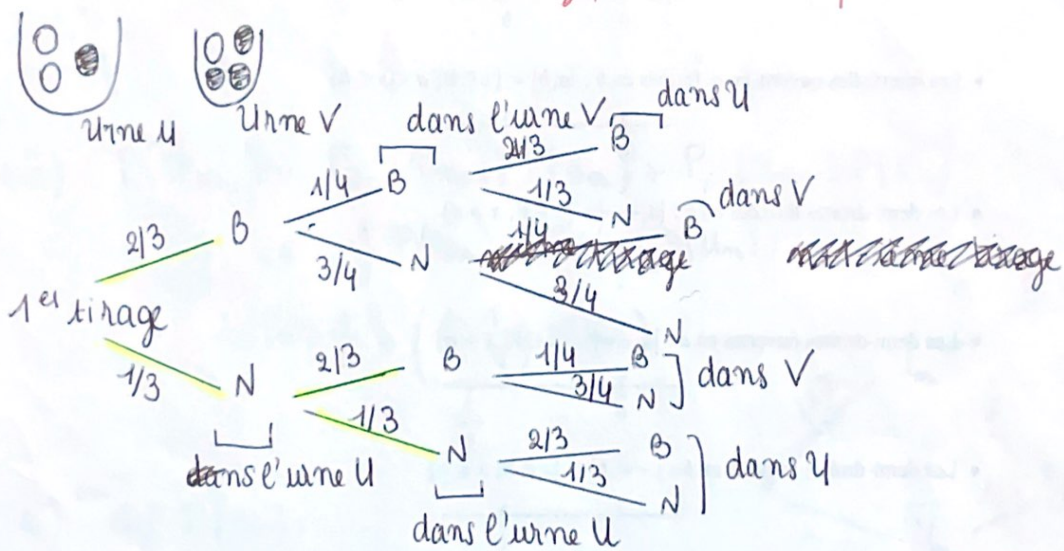
b) $P(\text{"tous pairs"}) = \frac{4^4}{9^4}$

c) $P(\text{"tous les chiffres diff"})$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{9^4}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{9^3}$$

## Exercice 20 (Proba conditionnelle, Formule des proba totales)




1 a) $P(U_2) = \cancel{P(U_1 \cap N)} = P_{U_1}(N)\,P(U_1) = \frac{1}{3} \times 1$

$= P(U_1 \cap N)$

b) $P(U_3)$ = en lisant l'arbre $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

$= P_{U_2}(U_3)\,P(U_2) + P_{V_2}(U_3)\,P(V_2)$ (proba totale)

$= \cancel{P(N)} \times \frac{1}{3} + \cancel{P(B)} \times \frac{2}{3}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{18}$

2. $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$

$$= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3)$$ (proba composées)

$$= \frac{2}{3} \times P_{V_2}(B_2) \times P_{U_3}(B_3)$$

$$= \frac{\cancel{2}}{3} \times \frac{1}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{9}$$

$p_n = P(U_n)$

$p_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} p_n$

$u_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} u_n$

3. On cherche $P_{B_2}(U_2)$.
On cherche à remonter le temps → Bayes + proba totale

$$P_{B_2}(U_2) = \frac{P(U_2)\,P_{U_2}(B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{P_{U_2}(B_2)P(U_2) + P_{V_2}(B_2)P(V_2)}$$

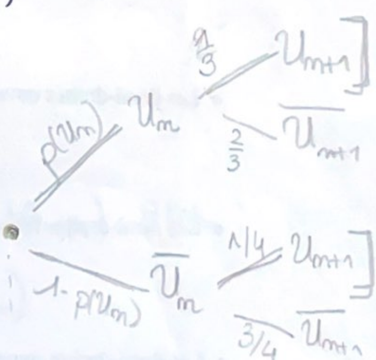
$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{4}{7}$$

4 a) $$P(U_{n+1}) = P_{U_n}(U_{n+1})\,P(U_n) + P_{V_n}(U_{n+1})\,P(V_n)$$

$$= \frac{1}{3} P(U_n) + \frac{1}{4}(1 - P(U_n))$$

$$= \frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{12}} P(U_n)$$




b)
```
def P(n):
    p = 1        # p1
    for k in range(2, n+1):
        p = 1/4 + 1/12 p
    return(p)
```

5. $$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} u_n \end{cases}$$

suite arithmético-géométrique :

$\ell = \frac{3}{11}$

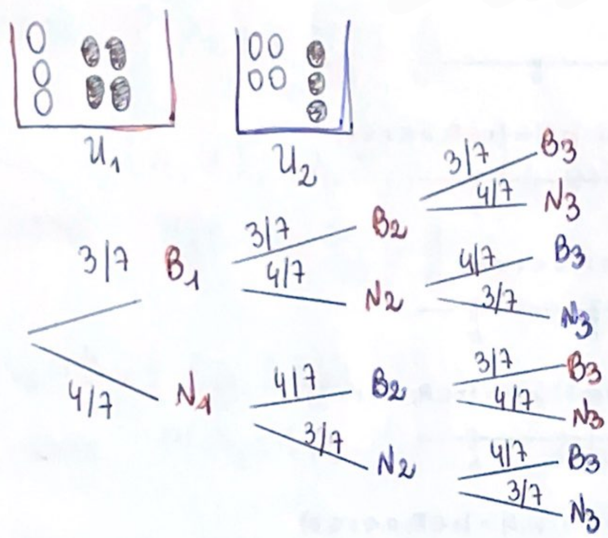
$$u_n = \frac{8}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{11}$$

$$P(B_n) = P_{U_n}(B_n)\,P(U_n) + P_{V_n}(B_n)\,P(V_n)$$

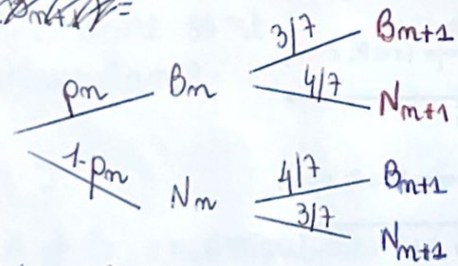
$$= \frac{2}{3} \times U_n + \frac{1}{4}(1-U_n)$$

$$= \frac{40}{11} \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{4}{11}$$

## Exercice 19




1. ~~P(Bn+1)~~ =




$p_1 = \frac{3}{7}$

$$P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n) + P_{N_n}(B_{n+1}) \times P(N_n)$$

$$p_{n+1} = \frac{3}{7} \times p_n + \frac{4}{7} \times (1-p_n)$$

$$= \frac{4}{7} - \frac{1}{7} p_n$$

2. $\left(l = \frac{1}{2}\right)$ $\quad p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$

Exercice 16 $\Omega = [\![1 \ldots 6]\!]^2$ en particulier $\text{card}\,\Omega = 36$

- $A_1 = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$
  donc $P(A_1) = \frac{5}{36}$

- $A_2 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$
  donc $P(A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- $B = \{(4,1), (4,2), \ldots, (4,6)\}$
  donc $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- $A_1 \cap B = \{(4,2)\}$
  donc $P(A_1 \cap B) = \frac{1}{36}$

- $A_2 \cap B = \{(4,3)\}$
  donc $P(A_2 \cap B) = \frac{1}{36}$

Ccl : $P(A_1 \cap B) \neq P(A_1) \times P(B)$
donc $A_1$ et $B$ ne sont pas indépendants

$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \times P(B)$
donc $A_2$ et $B$ sont indépendants.

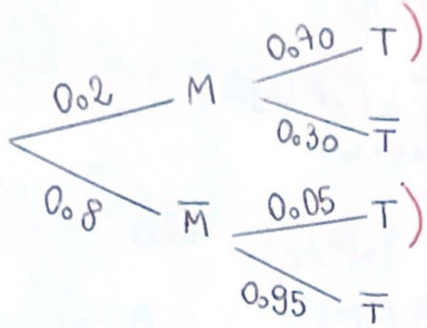
Exercice 13

Informations : $P(M) = \frac{20}{100} = 0{,}2$ M : "malade"

T : "test positif"

$P_M(T) = 0{,}70$

$P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}95$




1) On cherche $P_T(M)$ "retour dans le temps" → Bayes

$$P_T(M) = \frac{P(M)\,P_M(T)}{P(T)}$$

Or, formule des proba totales ($(M, \overline{M})$ syst. complet d'évènements)

$$P(T) = P(M)\,P_M(T) + P(\overline{M})\,P_{\overline{M}}(T)$$
$$= 0{,}18$$

Finalement,

$$P_T(M) = \frac{0{,}2 \times 0{,}70}{0{,}18} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9} \simeq 0{,}78$$ pas hyper efficace

2) $P(T) = 0{,}44$

puis $P_T(M) \simeq 0{,}956$ efficace.

## Exercice 12

$M_k$ : "la machine k est en panne"

1. On cherche $P(\overbrace{M_1 \cup M_2 \cup M_3}^{S})$ S "le système est en panne"

On va calculer (ou formule du crible + indé.)

$$P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}) = P(\overline{M_1})P(\overline{M_2})P(\overline{M_3}) \quad \text{par indé}$$
$$= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$$

puis $P(M_1 \cup M_2 \cup M_3) = p_1+p_2+p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1p_2p_3 = P(S)$

2. On veut $P_S(M_1)$ "retour ds le tps" → Bayes.

$$P_S(M_1) = \frac{P(M_1)\,P_{M_1}(S)}{P(S)}$$

car si $M_1$ en panne, le syst. est en panne

$$= \frac{p_1 \times 1}{p_1+p_2+\dots}$$

## Exercice 17

(faire un arbre)

- $\overline{A}$ : " soit aucun pile soit aucun face"

$\overline{A} = (F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3)$

$P(\overline{A}) = (1-p)^3 + p^3$ (union disjointe + indé.)

donc $P(A) = 1-(1-p)^3 - p^3$

- $B = \underbrace{(F_1 \cap F_2 \cap F_3)}_{\text{aucun pile}} \cup \underbrace{(P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3)}_{\text{exactement un pile}}$

$P(B) = (1-p)^3 + 3p(1-p)^2$

- $A \cap B$ = " il est apparu exactement un pile (et au-un face)"

$P(A \cap B) = 3p(1-p)^2$

- si $p = 1/4$

$P(A) = \frac{3^2}{2^4}$ ; $P(B) = \frac{3^3}{2^5}$ ; $P(A \cap B) = \frac{3^3}{2^6}$

Non

- si $p = \frac{1}{2}$

$P(A) = \frac{3}{4}$ ; $P(B) = \frac{1}{2}$ ; $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

Oui

# Exercice 14

Notons $\forall k \in \{1,..,5\}$ , $P_k$ " obtenir Pile au k-ième lancer".

- $\mathbb{P}(X_1) = \mathbb{P}(P_1)$ On obtient le 1er Pile au 1er lancer ie on obtient Pile au 1er lancer

$= p$

- $\forall k \in \{2,3,4\}$,

$\mathbb{P}(X_k) = \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \ldots \cap \overline{P_{k-1}} \cap P_k)$

On obtient Pile pour la 1ère fois au $k^e$ lancer donc pendant les k-1 premiers lancers, on obtient que des Face et au $k^e$ lancer, Pile.

$= \mathbb{P}(\overline{P_1}) \times \mathbb{P}(\overline{P_2}) \times \ldots \times \mathbb{P}(\overline{P_{k-1}}) \times \mathbb{P}(P_k)$ car les lancers sont indépendants.

$= (1-p) \times (1-p) \times \ldots \times (1-p) \times p$

$= (1-p)^{k-1} \times p$

- $\mathbb{P}(X_5) = \mathbb{P}\left((\overline{P_1} \cap \ldots \cap \overline{P_4} \cap P_5) \cup (\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \ldots \cap \overline{P_5})\right)$

soit on obtient le 1er pile au 5e lancer
soit on obtient aucun Pile

$= \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \ldots \cap \overline{P_4} \cap P_5) + \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \ldots \cap \overline{P_5})$

car les évènements $\overline{P_1} \cap .. \cap \overline{P_4} \cap P_5$ et $\overline{P_1} \cap .. \cap \overline{P_5}$ sont incompatibles

$= \mathbb{P}(\overline{P_1}) \times .. \times \mathbb{P}(\overline{P_4}) \times \mathbb{P}(P_5) + \mathbb{P}(\overline{P_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(\overline{P_5})$

car les lancers sont indépendants

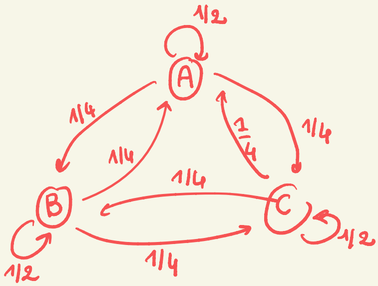
$= (1-p)^4 \times p + (1-p)^5$

$= (1-p)^4 [p + 1 - p]$

$= (1-p)^4$

# Exercice 21

1.




$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. a) $a_0 = 1$ ; $b_0 = 0$ ; $c_0 = 0$

b) $a_1 = \mathbb{P}(A_1 \cap A_0) = \mathbb{P}(A_0)\,\mathbb{P}_{A_0}(A_1) = \frac{1}{2}$ ; $b_1 = \frac{1}{4}$ ; $c_1 = \frac{1}{4}$

c) $(A_n, B_n, C_n)$ SCE donc proba totale,

d)
e) $\mathbb{P}(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$

$= a_n \times \frac{1}{2} + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times \frac{1}{4}$

et de même pour les autres

f) Récurrence

3. $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

5. Récurrence

6. $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 4 \times M^n \ldots$

7. $M = \frac{1}{4} A$

8.
9. $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = V_0 \times M^n$

$= \frac{1}{3\times 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \end{pmatrix}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = \frac{1}{3\times 4^n}(4^n+2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{3} & \text{car } -1 < \frac{1}{4} < 1 \\ b_n = \frac{1}{3\times 4^n}(4^n-1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow \frac{1}{3} \\ c_n = b_n \end{cases}$

10. $U = \left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\right)$