

COLLES 23 & 24 - Du 30/03 au 03/04 & du 20/04 au 24/04

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours (voir page 2).

Chapitre 23 - Continuité

- Continuité en un point
- Continuité sur un intervalle
- Continuité des fonctions usuelles
- Opérations sur les fonctions continues
- Lien entre continuité et convergence d'une suite (si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et f continue en ℓ alors $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$)
- Prolongement par continuité d'une fonction
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Théorème des bornes (une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes)
- Extension aux fonctions à valeurs complexes

Chapitre 24 - Espaces vectoriels (Partie 1)

- Notion d'espace vectoriel et exemples classiques
- Règles de calcul dans les espaces vectoriels
- Notion de combinaison linéaire, notion d'espace engendré par une famille de vecteurs
- Notion de sous-espace vectoriel, caractérisation
- Sous-espace vectoriel engendré par une famille, règles de manipulation sur les «vect»
- Notion de famille génératrice
- Opération sur les sev : intersection, somme, somme directe, espaces supplémentaires

NOTES POUR LES COLLEUSES/COLLEURS : Le chapitre «Espaces vectoriels» a été découpé en deux parties. En particulier, les notions de famille libre, de base, de dimension,... seront vues plus tard et ne sont donc pas au programme pour l'instant.

Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice de cours seront demandés parmi les suivants. La question de cours sera notée sur cinq points, et de même pour l'exercice de cours, soit un total de **10 points** (sur les 20 au total). Néanmoins, tout énoncé du cours pourra faire l'objet d'une question de cours, à tout moment de la colle.

Un énoncé :

- ☐ Donner la définition d'une fonction continue en un point. *Faire une illustration graphique.* (Chap 23 - Définition 1.1)
- ☐ Donner le domaine de continuité des fonctions polynomiales, exponentielle, logarithme, cosinus et sinus (Chap 23 - Proposition 1.6)
- ☐ Donner l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires (la version de votre souhait). *Faire une illustration graphique.* (Chap 23 - Proposition 2.3 ou Proposition 2.7, point a)

- ☐ Donner la définition d'une famille génératrice d'un espace (Chap 24 - Définition 4.1)
- ☐ Donner la définition de la somme de deux sev (Chap 24 - Définition 5.5)
- ☐ Donner la caractérisation de deux espaces supplémentaires (avec l'intersection) (Chap 24 - Proposition 5.19)

Un exercice :

- ☐ On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ (x + 1)^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en 0 ?

(Chap 23 - Exemple 1.3)

- ☐ On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

(Chap 23 - Exemple 1.8)

- ☐ On considère la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-x} - 2x \end{aligned}$$

Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$. On admet que $e^{-1} \approx 0.37$. (Chap 23 - Exemple 2.8)

-
- ☐ Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ telle que F est l'espace vectoriel engendré par cette famille. *Faire une illustration graphique.* (Chap 24 - Exemple 4.2)
 - ☐ Donner une famille génératrice de $G = \{(a + b)X^2 - (b - c)X + a + 2c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. (Chap 24 - Exemple 4.3)
 - ☐ Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Montrer que la somme $F + G$ est directe. (Chap 24 - Exemple 5.15)