26. Relations de comparaison

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point. On notera $\overline{I}$ l'intervalle fermé ayant les mêmes bornes que I.

1 Symbole équivalent $\sim$

1.1 Définition

Définition 1.1 Soient $a \in \overline{I}$ et $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a. On dit que f et g sont *équivalentes au voisinage de a* si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

La notion d'équivalent est liée à la notion de limite : c'est donc une notion *locale*. Si on regarde un équivalent au point a, seul le comportement des fonctions *au voisinage de a* importe. Plus précisément, deux fonctions sont équivalents au point a si «elles se ressemblent autour du point a» mais on se sait rien sur le comportement global des deux fonctions.

! On ne peut pas écrire d'équivalent à zéro car cela revient, de la part la définition, à effectuer une division par zéro ce qui est strictement interdit.

Exemple 1.2 Donner un équivalent simple de la fonction donnée.

À comparer	Comparaison	Justification
$x \mapsto 2x^2 - 3x + 5$ en $+\infty$		
$x \mapsto 3x - x^2 + x^4$ en 0		
$x \mapsto 1 + e^x + 3x$ en $+\infty$		
$x \mapsto 5x^2 + 3\ln(x)$ en $+\infty$		

1.2 Règles de manipulation

Proposition 1.3 Soient $a \in \overline{I}$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $\ell \in \mathbb{K}$, avec $\ell \neq 0$.

$$\text{Si } \lim_{x \to a} f(x) = \ell \qquad \text{alors} \qquad f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell.$$

Exemple 1.4 Donner un équivalent simple des fonctions suivantes.

a) $\exp(x) \underset{x \to 0}{\sim}$

b) $\sqrt{x} \underset{x \to 2}{\sim}$

c) $x + 1 \underset{x \to 0}{\sim}$

d) $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim}$

Proposition 1.5 — Relation d'ordre. Soient $a \in \bar{I}$ et $f, g, h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ trois fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a.

1. *Réflexivité :* $f \underset{x\to a}{\sim} f$.
2. *Symétrie :* $f \underset{x\to a}{\sim} g$ si et seulement si $g \underset{x\to a}{\sim} f$.
3. *Transitivité :* Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et $g \underset{x\to a}{\sim} h$ alors $f \underset{x\to a}{\sim} h$.

Proposition 1.6 oient $a \in \bar{I}$ et $f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a.

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\lambda f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda g(x)$
- Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_2(x)$
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$
- Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ alors $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si f et g sont >0 au voisinage de a alors $f^\alpha(x) \underset{x\to a}{\sim} g^\alpha(x)$.

! Il n' y a pas de règles générales pour les autres opérations.

- **On n'additionne pas les équivalents.**

  Exemple 1.7 Montrer que

$$-x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x+2 \qquad \text{et} \qquad x \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

  mais que l'équivalent suivant est faux

$$-x+1+x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x+2+x$$

- **On ne compose pas à gauche les équivalents par une fonction.**

  Exemple 1.8 Montrer que

$$x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

  mais que l'équivalent suivant est faux

$$e^{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x}$$

Pour toutes les opérations autre que celles données par un résultat du cours, pour prouver un équivalent, il faudra revenir à la définition.

Exemple 1.9 Montrons l'équivalent $\sqrt{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$

1.3 Équivalents usuels

Équivalents à connaître :

a) $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ b) $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ c) $\arccos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{2}$ d) $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$

e) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ f) $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ g) $\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ h) $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

i) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ j) $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$ k) $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ l) $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

1.4 Équivalents usuels

Équivalents à connaître :

Plus généralement, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, on a,

a) $e^{f(x)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} f(x)$ b) $\sin(f(x)) \underset{x\to 0}{\sim} f(x)$ c) $\ln(1+f(x)) \underset{x\to 0}{\sim} f(x)$

Exemple 1.10 Compléter les équivalents suivants.

a) $e^{x^2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim}$ b) $\sin(\frac{1}{x}) \underset{x\to +\infty}{\sim}$

c) $\sin(x-1) \underset{x\to 1}{\sim}$ d) $\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to +\infty}{\sim}$

1.5 Application à la détermination de limites

Proposition 1.11 Soient $a \in \overline{I}$ et $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a et vérifiant $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Alors

f admet une limite en a si et seulement si g admet une limite en a.

Le cas échéant, on a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Exemple 1.12 Déterminons la limite éventuelle de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+2x)\arctan(x)}{\sin^2(x)}$ en 0.

Exemple 1.13 Déterminer la limite suivante $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Exemple 1.14 Trouver un équivalent simple de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(\sin^2(x))}{x - \frac{\pi}{2}}$ en $\frac{\pi}{2}$ et en déduire sa limite quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$. *On admet que*

$$\cos h - 1 \underset{h \to 0}{\sim} -\frac{h^2}{2}$$

Proposition 1.15 — Équivalents par encadrement. Soient $a \in \bar{I}$ et $f, g, h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ trois fonctions à valeurs réelles qui ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a. On suppose que :

1. Pour tout $x \in I$ (ou au voisinage de a), $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
2. $f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$.

Alors $g(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x)$.

Exemple 1.16 On suppose que

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \qquad -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x^4 \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

En déduire un équivalent (simple) de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ en 0.

Proposition 1.17 — Conservation du signe. Soient $a \in \bar{I}$ et $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ deux fonctions à valeurs réelles qui ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a et telles que $f \sim_a g$.

Si f est strictement positive (respectivement strictement négative) au voisinage de a alors g aussi.

Exemple 1.18 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x - 1 - \ln(x)}{2x^2 + 1}.$$

1. Donner un équivalent simple de f' en $+\infty$.
2. En déduire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $[x_0, +\infty[$.

2 Symboles o et O

2.1 Définition

Définition 2.1 Soient $a \in \overline{I}$ et $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a.

1. On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

   On écrit alors $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ et on lit « f est un petit o de $g(x)$ au voisinage de a ».

2. On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a si et seulement si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

   On écrit alors $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$ et on lit « f est un grand O de $g(x)$ au voisinage de a ».

? Interprétation non rigoureuse.

- Si deux fonctions f et g tendent vers $+\infty$ en a, dire que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$$

  signifie que g tend "plus vite" vers $+\infty$ que f en a, autrement dit « $f(x)$ et $g(x)$ sont très grands, mais $g(x)$ est encore plus grand que $f(x)$ ».
- Si deux fonctions f et g tendent vers 0 en a, dire que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$$

  signifie que la fonction g tend moins vite vers 0 que la fonction f en a, « $f(x)$ et $g(x)$ sont très petits, mais $g(x)$ reste plus grand que $f(x)$ ».

Exemple 2.2 Donner la bonne comparaison, en termes de o entre les deux fonctions données.

À comparer	Comparaison	Justification
$x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ en $+\infty$		
$x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ en 0		
$x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$		
$x \mapsto x$ et $x \mapsto \exp(x)$ en $+\infty$		

L'exemple précédent illustre la proposition suivante qui donne les relations de comparaison entre monômes.

Proposition 2.3 — Comparaison des fonctions puissances. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$. Alors :

a) au voisinage de $+\infty$: $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\beta)$.   b) au voisinage de 0 : $x^\beta \underset{x \to 0}{=} o(x^\alpha)$.

On peut également reformuler le théorème des croissances comparées grâce à la notation o.

Proposition 2.4 — Croissances comparées. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ trois réels strictement positifs. On a

- Au voisinage de $+\infty$:

  a) $\ln^\beta(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$ b) $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\gamma x})$ c) $\ln^\beta(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\gamma x})$

- Au voisinage de 0 :

$$x^\alpha |\ln(x)|^\beta \underset{x\to 0}{=} o(1)$$

Exemple 2.5 Déterminer une fonction f telle que $x\ln(x) = \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$.

Exemple 2.6 Dire si les relations de comparaison suivantes sont vraies ou pas.

a) $2x+3 \underset{x\to+\infty}{=} O(x)$ b) $2x+3 \underset{x\to 0}{=} O(x)$

Exemple 2.7 Donner une comparaison, en termes de O pour la fonction concernée.

À comparer	Comparaison	Justification
$x \mapsto 5$ en $+\infty$		
$x \mapsto 10x$ en $+\infty$		
$x \mapsto 2x^2 + 3x$ en $+\infty$		
$x \mapsto 2x^2 + 3x$ en 0		
$x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ en $+\infty$		

2.2 Propriétés des symboles o et O

Proposition 2.8 — Lien entre les relations de comparaison. Soient $a \in \bar{I}$ et $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ deux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a.

1. $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x))$.
2. Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ alors $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$.
3. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ alors $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$.

La réciproque des points 2. et 3. de la proposition précédente est fausse. En effet,

$$x \underset{x\to+\infty}{=} O(2x) \qquad \text{mais} \qquad x \cancel{\underset{x\to+\infty}{=}} o(2x)$$

De même,

$$x \underset{x\to+\infty}{=} O(2x) \qquad \text{mais} \qquad x \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} o(2x)$$

Exemple 2.9 Donner un équivalent de $x \mapsto \mathrm{e}^x + x^2 + \ln(x)$ en $+\infty$.

Proposition 2.10 — Règles de calculs des symboles o et O. Soient $a \in \overline{I}$ et $f, g, h, f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

1. *Compatibilité avec la somme :*

$$\text{Si } \left(f_1(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)) \quad \text{et} \quad f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)) \right) \text{ alors } f_1(x) + f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$$

(Idem avec le symbole o).

2. *Compatibilité avec le produit :*

$$\text{Si } \left(f_1(x) \underset{x\to a}{=} O(g_1(x)) \quad \text{et} \quad f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g_2(x)) \right) \text{ alors } f_1(x) f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g_1(x) g_2(x))$$

De plus, si c'est un petit o dans une des deux hypothèses alors on obtient un $o(\cdot)$.

3. *Compatibilité avec la multiplication par un scalaire :* soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{Si } f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)) \text{ alors } \lambda f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$$

(de même avec le symbole o).

4. *Transitivité :*

$$\text{Si } \left(f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to a}{=} O(h(x)) \right) \text{ alors } \lambda g(x) \underset{x\to a}{=} O(h(x))$$

De plus, si c'est un petit o dans une des deux hypothèses alors on obtient un $o(\cdot)$.

Preuve du 1. On suppose que

$$f_1(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)) \quad \text{et} \quad f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$$

Montrons que

$$f_1(x) + f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$$

Comme $f_1(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, on sait que la fonction $x \mapsto \frac{f_1(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a :

$$\exists M_1 \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \text{ «au voisinage de } a\text{» }, \qquad \left| \frac{f_1(x)}{g(x)} \right| \leq M_1$$

De même, comme $f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$,

$$\exists M_2 \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \text{ «au voisinage de } a\text{» }, \qquad \left|\frac{f_2(x)}{g(x)}\right| \leq M_2$$

Alors, pour tout x «au voisinage de a» en utilisant l'inégalité triangulaire, on a,

$$\left|\frac{f_1(x)+f_2(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{f_1(x)}{g(x)} + \frac{f_2(x)}{g(x)}\right| \leq \left|\frac{f_1(x)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f_2(x)}{g(x)}\right| \leq M_1 + M_2$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a, donc,

$$f_1(x) + f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$$

■

Exemple 2.11 Soient f et g deux fonctions telles que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^2)$$

Que peut-on dire de $f+g$ au voisinage de 0 ?

Exemple 2.12 Soient f et g deux fonctions telles que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 2-3x+o(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \underset{x\to 0}{=} 1-4x^2+o(x^2)$$

Que peut-on dire de $f\times g$ au voisinage de 0 ?

La liste ci-dessus n'est pas exhaustive. Il faut savoir manipuler les symboles $o(\ )$ et $O(\ )$ et être capable de se convaincre qu'une règle est licite en revenant à la définition. Entraînez-vous à démontrer par exemple :

$$\text{Si } f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \text{ et } g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \quad \text{alors} \quad f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)).$$

$$\text{Si } f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x)) \text{ et } h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \quad \text{alors} \quad f(h(x)) \underset{x\to a}{=} o\big(g(h(x))\big).$$

Les symboles $o(\ )$ et $O(\ )$ ne se manipulent pas comme des fonctions. En particulier, on ne peut pas dire $o(g(x))-o(g(x))=0$, car on ne sait pas qui se « cache » derrière le symbole $o(g(x))$. On pourra simplement dire $o(g(x))-o(g(x)) =_a o(g(x))$. Par exemple,

$$x \underset{x\to a}{=} o(x^2) \quad \text{et} \quad 2x \underset{x\to a}{=} o(x^2) \quad \text{donc} \quad x-2x=o(x^2)(\neq 0)$$

3 Adaptation au cas des suites

On adapte sans mal toutes les définitions pour les suites (après tout, il s'agit d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$). La principale différence est que pour les suites, on considère toujours ces relations de comparaison au voisinage de $+\infty$. Il est donc inutile de préciser en quel point on se place.

Définition 3.1 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

1. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente* à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
   On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
2. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable* devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
   On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
3. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *dominée* par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

Exemple 3.2 Montrer que

a) $\frac{2}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ b) $n\cos(n) = O(n)$ c) $n^2 + n + \frac{1}{n} = O(n^2)$

Exemple 3.3 Montrer que

a) $n = o(n^2)$ b) $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Pour les suites, les mêmes règles que pour les fonctions s'appliquent :

Proposition 3.4 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites réelles qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

- $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ ssi $u_n \underset{n}{=} v_n + o(v_n)$
- Si $u_n \underset{n}{=} O(w_n)$ et $v_n \underset{n}{=} O(w_n)$ alors $u_n + v_n \underset{n}{=} O(w_n)$
- Si $u_n \underset{n}{\sim} w_n$ et $v_n \underset{n}{\sim} t_n$ alors $u_n v_n \underset{n}{\sim} w_n t_n$
- Si $u_n \underset{n}{=} O(w_n)$ et $v_n \underset{n}{=} O(t_n)$ alors $u_n v_n \underset{n}{=} O(w_n t_n)$
- Si $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ alors $u_n^p \underset{n}{\sim} v_n^p$ pour $p \in \mathbb{N}$ **fixé**
- Si $u_n \underset{n}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n}{=} O(w_n)$ alors $u_n \underset{n}{=} O(w_n)$

Et à l'instar du cas des fonctions, on devra rester vigilants pour toute autre règle non donnée par un résultat du cours (c'est à dire, on revient à la définition pour démontrer une règle).

Exemple 3.5 Déterminer un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \binom{3}{n}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Ce qu'on ne pourra pas faire :

- Écrire un équivalent à 0.
- Ajouter ou soustraire des équivalents. Par exemple,

$$n-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n \quad \text{et} \quad n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+2 \quad \text{mais} \quad \cancel{1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2}$$

- Composer les équivalents par une fonction. Par exemple,

$$n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2+n \qquad \text{mais} \qquad \cancel{\mathrm{e}^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{n^2+n}}$$

- Élever un équivalent à une puissance non fixe.

$$1+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \quad \text{mais} \quad \cancel{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1}$$

  On peut démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Proposition 3.6 — Croissances comparées, version suite. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ trois réels strictement positifs. On a

$$\ln^\beta(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\alpha), \qquad n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\gamma n}), \qquad \ln^\beta(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\gamma n})$$

Exemple 3.7 Montrer que

$$\frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$