TD 26 – Relations de comparaison

Exercice 1 – Vrai/Faux. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, on les démontrera. Lorsqu'elles sont fausses, on exhibera un contre-exemple.

a) Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n + 1 \sim v_n + 1$.

b) Si $u_n \sim v_n$ alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

c) Si $u_n \sim v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

d) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$

e) Si $u_n = O(v_n)$ alors $u_n = o(v_n)$

f) Si $u_n = \frac{1}{n} + o(n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

1 Équivalent

Exercice 2 – Donner des équivalents simples des fonctions suivantes pour $t \to 0$ et $t \to +\infty$. ***Prouver rigoureusement** chaque équivalent.*

a) $t \mapsto 3t^2 + 2t - 1$

b) $t \mapsto t + \sqrt{t}$

c) $t \mapsto \ln(t) + (\ln(t))^2$

d) $t \mapsto t + 1 - \ln(t)$

e) $t \mapsto t + \sqrt{t+1}$

f) $t \mapsto \frac{3t^2+1}{2t-1}$

Exercice 3 – Donner des équivalents simples en 0 des fonctions suivantes. ***Prouver rigoureusement** chaque équivalent.*

a) $x \mapsto \cos(\sin x)$

b) $x \mapsto \dfrac{\left(e^{\sin(x)} - 1\right)(x^3+1)}{1-\cos(x)}$

c) $x \mapsto \ln(1+\sin x)$

d) $x \mapsto a^x - b^x$ (avec $a > 0$ et $b > 0$)

e) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2+3x}} - \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$

f) $x \mapsto \tan\left(\dfrac{\pi}{2x+1}\right)$

Exercice 4 – Pour chacune des suites suivantes, en donner un équivalent (en $+\infty$) le plus simple possible :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^3 - n^2$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sin\left(\frac{n+2}{n^3}\right)$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

f) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

g) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^{\frac{1}{n}}$

h) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$

Exercice 5 – Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang et telles que $u_n \sim_n v_n$. Montrer que

$$e^{u_n} \sim_n e^{v_n} \iff u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 6 – Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives et telles que $u_n \sim_n v_n$. On suppose que (v_n) admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{1\}$. Montrer que $\ln(u_n) \sim_n \ln(v_n)$.

2 Négligeabilité o

Exercice 7 – Donner la bonne comparaison entre les deux fonctions en terme de relation de négligeabilité suivante et **prouver rigoureusement** chaque petit o.

a) $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ en $+\infty$

b) $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ en 0

c) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ en $+\infty$

d) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ en 0

e) $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \exp(x)$ en $+\infty$

f) $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln(x)$ en $+\infty$

g) $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ en $+\infty$

h) $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et $x \mapsto e^{2x}$ en $+\infty$

i) $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto (\ln(x))^2$ en $+\infty$

j) $x \mapsto \arctan(x)$ et $x \mapsto x$ en $+\infty$

Exercice 8 – *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Déterminer une fonction f telle que $x\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$
2. Déterminer une fonction g telle que $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to 0}{=} o(g(x))$

Exercice 9 – Classer les fonctions suivantes par «ordre de négligeabilité» au voisinage de $+\infty$.

$$x \mapsto \frac{1}{x},\quad x \mapsto \frac{1}{x^2},\quad x \mapsto \frac{\ln(x)}{x},\quad x \mapsto \frac{(\ln(x))^2}{x},\quad x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$$

3 Domination O

Exercice 10 – Montrer les relations de domination suivantes pour les fonctions données.

a) $\sin(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(1)$

b) $x^2 \underset{x\to 0}{=} O(1)$

c) $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} O(x^2)$

d) $3x^5 - x^4 + 2x \underset{x\to+\infty}{=} O(x^5)$

e) $3x^5 - x^4 + 2x \underset{x\to 0}{=} O(x)$

f) $4x^3 + 1000x^2 \underset{x\to+\infty}{=} O(x^3)$

g) $x^3 \underset{x\to+\infty}{=} O(4x^3 + 1000x^2)$

h) $2x^2\sin(x) \underset{x\to 0}{=} O(x^3)$

i) $2x^2\sin(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x^2)$

j) $2x^2\sin(x) \underset{x\to\pi}{=} O(x-\pi)$

k) $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{=} O(x)$

Exercice 11 – Montrer les relations de domination suivantes pour les suites données.

a) $\frac{2}{n(n+1)} = O(\frac{1}{n^2})$

b) $\frac{2}{n} = O(n)$

c) $n^2 + \sin(n) = O(n^2)$

d) $\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 12 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\qquad u_{n+1} = u_n + a$$

avec a une constante réelle. Montrer que $u_n = O(n)$.

Exercice 13 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\qquad u_{n+1} = u_n + n$$

Montrer que $u_n = O(n^2)$. *On pourra faire apparaître une somme télescopique.*

4 Application : calcul de limites

Exercice 14 – Equivalents et limites. Donner un équivalent simple des fonctions suivantes et en déduire la limite correspondante.

a) $x \mapsto x^3+x^2+1$ en $+\infty$

b) $x \mapsto x^3+x^2+1$ en 0

c) $x \mapsto x^2+\ln(x)+\mathrm{e}^{-x}$ en $+\infty$

d) $x \mapsto \frac{1}{x}+\mathrm{e}^{-x}$ en $+\infty$

e) $x \mapsto \ln(-x)+x^3$ en $-\infty$

f) $x \mapsto \mathrm{e}^x+x^2$ en $+\infty$

Exercice 15 – Equivalents et limites. Donner un équivalent simple pour les quotients suivants en 0 et en $+\infty$ et en déduire leurs limites en 0 et $+\infty$.

a) $x \mapsto \dfrac{-2x^6+x^4+1}{x^3-x^2}$

b) $x \mapsto \dfrac{\ln(x)+4x+1}{2\sqrt{x}+3\ln(x)}$

c) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $x \mapsto \dfrac{1+2x^2}{(1+2x^2)^3}$

e) $x \mapsto \dfrac{4}{(2x-3)(2x+6)}$

f) $x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^8}}$

Exercice 16 – Equivalents et limites. Donner un équivalent simple des termes suivants et en déduire leurs limites.

a) $x \mapsto x(x+1)(x+2)\dots(x+p)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ en 0 et en $+\infty$

b) $x \mapsto \sqrt{2+x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$ en $+\infty$

c) $x \mapsto \left(\mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x}}-1\right)\sin\left(\dfrac{4}{x^2}\right)$ en $+\infty$

d) $x \mapsto x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x$ en $+\infty$

e) $x \mapsto \dfrac{\cos(4x)\ln(1+x^2)}{\sin(x^2)\cos(x)}$ en 0.

f) $x \mapsto \dfrac{\ln(x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}\ln(1+x)\sin(3x)}$ en 0

g) $x \mapsto \dfrac{\sin(4x)}{\sin(2x)}\cos(x)$ en 0

h) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}\sin(x)}{x}$ en 0

Exercice 17 – Montrer que $\ln(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln(x))$. En déduire la limite de

$$x \longmapsto \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} \quad \text{en} \quad +\infty$$

On pourra passer par la forme exponentielle.

Exercice 18 – Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}(3n^2+1)\sin\left(\frac{2}{n}\right)(e^{\frac{1}{n}}-1) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0^+}(1+2x^2)^{\frac{1}{x}}.$$

On pourra commencer par déterminer un équivalent.

Exercice 19 – Donner la limite dans des suites définies pour $n \geq 2$ par :

a) $u_n = \sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$

b) $u_n = n^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\sin(n!)$

c) $u_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $(x \neq 0)$

d) $u_n = \left(\dfrac{n^2+5n+2}{n^2-7n+4}\right)^n$

e) $u_n = \dfrac{n^2+\sin n}{\sqrt{n}+\cos n}$

f) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-\ln(n^3)}$

g) $u_n = \dfrac{\ln(\cos(a/n))}{\ln(\cos(b/n))}$ où $a,b \in \mathbb{R}^*$

h) $u_n = \dfrac{\sin(1/n)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n^2}}$

On pourra commencer par déterminer un équivalent.

5 Pour aller plus loin

Exercice 20 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation
$$x^3+nx-1=0,$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, possède une unique solution. On la note u_n.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$
En déduire la limite de $(u_n)_n$.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^3}{n}.$$
En déduire que
$$u_n - \frac{1}{n} =_{+\infty} O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$
4. On pose pour tout $n \geq 1$, $y_n = u_n - \dfrac{1}{n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$ny_n = -u_n^3,$$
et en déduire que $y_n = -\dfrac{1}{n^4}+O\left(\dfrac{1}{n^7}\right)$.
5. En déduire un développement asymptotique de (u_n) à deux termes.