TD 26 – Relations de comparaison (Correction)

Exercice 1 – Vrai/Faux. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, on les démontrera. Lorsqu'elles sont fausses, on exhibera un contre-exemple.

a) Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n + 1 \sim v_n + 1$.

Faux : $-1 + \dfrac{1}{n^2} \sim -1 + \dfrac{1}{n}$ mais $\frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{n^2}$.

b) Si $u_n \sim v_n$ alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Faux : $1 + \dfrac{1}{n^2} \sim 1 + \dfrac{1}{n}$ or $\ln(1 + \dfrac{1}{n^2}) \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $\ln(1 + \dfrac{1}{n}) \sim \dfrac{1}{n}$ donc $\ln(1 + \dfrac{1}{n^2}) \not\sim \ln(1 + \dfrac{1}{n})$.

c) Si $u_n \sim v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

Faux : $n + 1 \sim n$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 1 - n = 1$

d) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$

Vrai : (Une suite convergente est bornée)

e) Si $u_n = O(v_n)$ alors $u_n = o(v_n)$

Faux : On a, $2n = O(n)$ mais $2n \neq o(n)$

f) Si $u_n = \frac{1}{n} + o(n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Faux : $\sqrt{n} = \dfrac{1}{n} + o(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

1 Équivalent

Exercice 2 – Donner des équivalents simples des fonctions suivantes pour $t \to 0$ et $t \to +\infty$. ***Prouver rigoureusement*** *chaque équivalent.*

a) $t \mapsto 3t^2 + 2t - 1$ $\quad 3t^2 + 2t - 1 \sim_{+\infty} 3t^2$ et $3t^2 + 2t - 1 \sim_0 -1$

b) $t \mapsto t + \sqrt{t}$ $\quad t + \sqrt{t} \sim_{+\infty} t$ et $t + \sqrt{t} \sim_0 \sqrt{t}$

c) $t \mapsto \ln(t) + (\ln(t))^2$ $\quad \ln(t) + (\ln t)^2 \sim_{+\infty} (\ln t)^2$ et $\ln(t) + (\ln t)^2 \sim_0 (\ln t)^2$

d) $t \mapsto t + 1 - \ln(t)$

e) $t \mapsto t + \sqrt{t+1}$

f) $t \mapsto \frac{3t^2+1}{2t-1}$

Exercice 3 – Donner des équivalents simples en 0 des fonctions suivantes. ***Prouver rigoureusement*** *chaque équivalent.*

a) $x \mapsto \cos(\sin x)$

b) $x \mapsto \dfrac{\left(e^{\sin(x)}-1\right)(x^3+1)}{1-\cos(x)}$

c) $x \mapsto \ln(1+\sin x)$

d) $x \mapsto a^x - b^x$ (avec $a>0$ et $b>0$)

e) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2+3x}} - \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$

f) $x \mapsto \tan\left(\dfrac{\pi}{2x+1}\right)$

1. $cos(\sin x) \sim_0 1$
2. $\dfrac{\left(e^{\sin(x)}-1\right)(x^3+1)}{1-\cos(x)} \sim_0 \dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)} \sim_0 \dfrac{x}{x^2/2} \sim_0 \dfrac{2}{x}$
3. $\ln(1+\sin x) \sim_0 \sin(x) \sim_0 x$
4. Si $a=b$ alors f est identiquement nulle. Sinon
$$f(x) = a^x\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^x\right) \sim_0 (\ln(a)-\ln(b))x$$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+3x}} - \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}} = \dfrac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2+3x}}{\sqrt{4-9x^2}} \sim_0 \dfrac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2+3x}}{2} \sim_0 \dfrac{-3x}{2\sqrt{2}}$.
6. $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2x+1}\right) \sim_0 \sin\left(\dfrac{\pi}{2x+1}\right) \sim_0 -\sin\left(\dfrac{\pi}{2x+1}-\pi\right) \sim_0 -\sin\left(-\dfrac{2x\pi}{2x+1}\right) \sim_0 \dfrac{2x\pi}{2x+1} \sim_0 2x\pi$.

Exercice 4 – Pour chacune des suites suivantes, en donner un équivalent (en $+\infty$) le plus simple possible :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^3 - n^2$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sin\left(\frac{n+2}{n^3}\right)$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

f) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

g) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^{\frac{1}{n}}$

h) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$

a) $n^3 - n^2 \sim n^3$

b) $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{1}{n}$

c) $n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n}$

d) $\sin\left(\frac{n+2}{n^3}\right) \sim \dfrac{n+2}{n^3} \sim \dfrac{1}{n^2}$

e) $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + \dfrac{1}{n}) \sim \dfrac{1}{n}$

f) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

g) $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}} \sim 1$

h) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{\cos(\pi/2 - 1/n)} \sim n$

Exercice 5 – Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang et telles que $u_n \sim_n v_n$. Montrer que

$$e^{u_n} \sim_n e^{v_n} \quad \iff \quad u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff \lim_n \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = 1 \iff \lim_n e^{u_n - v_n} = 1 \iff \lim_n (u_n - v_n) = 0$$

où la dernière équivalence provient de la continuité de exp en 0 et de ln en 1

Exercice 6 – Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives et telles que $u_n \sim_n v_n$. On suppose que (v_n) admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{1\}$. Montrer que $\ln(u_n) \sim_n \ln(v_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) + \ln(v_n)$$

et

$$\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = o(\ln(v_n))$$

car $\lim_n \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0$ et $\lim_n \ln(v_n) \in \overline{\mathbb{R}}$. Donc

$$\ln(u_n) \underset{n}{=} \ln(v_n) + o(\ln(v_n))$$

donc $\ln(u_n) \sim_n \ln(v_n)$.

2 Négligeabilité o

Exercice 7 – Donner la bonne comparaison entre les deux fonctions en terme de relation de négligeabilité suivante et **prouver rigoureusement** chaque petit o.

a) $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ en $+\infty$

b) $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ en 0

c) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ en $+\infty$

d) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ en 0

e) $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \exp(x)$ en $+\infty$

f) $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln(x)$ en $+\infty$

g) $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ en $+\infty$

h) $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ en $+\infty$

i) $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto (\ln(x))^2$ en $+\infty$

j) $x \mapsto \arctan(x)$ et $x \mapsto x$ en $+\infty$

Exercice 8 – *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Déterminer une fonction f telle que $x\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$
2. Déterminer une fonction g telle que $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to 0}{=} o(g(x))$

Exercice 9 – Classer les fonctions suivantes par «ordre de négligeabilité» au voisinage de $+\infty$.

$$x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}, \quad x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}, \quad x \mapsto \frac{(\ln(x))^2}{x}, \quad x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$$

3 Domination O

Exercice 10 – Montrer les relations de domination suivantes pour les fonctions données.

a) $\sin(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(1)$

b) $x^2 \underset{x\to0}{=} O(1)$

c) $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} O(x^2)$

d) $3x^5 - x^4 + 2x \underset{x\to+\infty}{=} O(x^5)$

e) $3x^5 - x^4 + 2x \underset{x\to0}{=} O(x)$

f) $4x^3 + 1000x^2 \underset{x\to+\infty}{=} O(x^3)$

g) $x^3 \underset{x\to+\infty}{=} O(4x^3 + 1000x^2)$

h) $2x^2\sin(x) \underset{x\to0}{=} O(x^3)$

i) $2x^2\sin(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x^2)$

j) $2x^2\sin(x) \underset{x\to\pi}{=} O(x-\pi)$

k) $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{=} O(x)$

Exercice 11 – Montrer les relations de domination suivantes pour les suites données.

a) $\frac{2}{n(n+1)} = O(\frac{1}{n^2})$

b) $\frac{2}{n} = O(n)$

c) $n^2 + \sin(n) = O(n^2)$

d) $\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 12 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + a$$

avec a une constante réelle. Montrer que $u_n = O(n)$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 1. Donc son terme général est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 + \alpha n$$

Donc,

$$u_n = O(n)$$

Exercice 13 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + n$$

Montrer que $u_n = O(n^2)$. *On pourra faire apparaître une somme télescopique.*

On a,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad u_{k+1} - u_k = k$$

En sommant cette relation, on obtient,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} k$$

En reconnaissant à gauche une somme télescopique et à droite une somme des entiers, on obtient,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n - u_0 = \frac{(n-1)n}{2}$$

et donc,

$$u_n = O(n^2)$$

4 Application : calcul de limites

Exercice 14 – Equivalents et limites. Donner un équivalent simple des fonctions suivantes et en déduire la limite correspondante.

a) $x \mapsto x^3+x^2+1$ en $+\infty$

$$\boxed{x^3+x^2+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} x^3+x^2+1 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = \boxed{+\infty}$$

b) $x \mapsto x^3+x^2+1$ en 0

$$\boxed{x^3+x^2+1 \underset{x\to0}{\sim} 1} \text{ donc } \lim_{x\to0} x^3+x^2+1 = \lim_{x\to0} 1 = \boxed{1}$$

c) $x \mapsto x^2+\ln(x)+\mathrm{e}^{-x}$ en $+\infty$

$$\boxed{x^2+\ln(x)+\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} x^2+\ln(x)+\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = \boxed{+\infty}$$

d) $x \mapsto \frac{1}{x}+\mathrm{e}^{-x}$ en $+\infty$

$$\boxed{\frac{1}{x}+\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \boxed{0}$$

e) $x \mapsto \ln(-x)+x^3$ en $-\infty$

$$\boxed{\ln(-x)+x^3 \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3} \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} \ln(-x)+x^3 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = \boxed{-\infty}$$

f) $x \mapsto \mathrm{e}^x+x^2$ en $+\infty$

$$\boxed{\mathrm{e}^x+x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x+x^2 = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \boxed{+\infty}$$

Exercice 15 – Equivalents et limites. Donner un équivalent simple pour les quotients suivants en 0 et en $+\infty$ et en déduire leurs limites en 0 et $+\infty$.

a) $x \mapsto \dfrac{-2x^6+x^4+1}{x^3-x^2}$

- En $+\infty$. On a,

$$\boxed{\frac{-2x^6+x^4+1}{x^3-x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} -2x^3} \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^6+x^4+1}{x^3-x^2} = -\infty}$$

- En 0. On a,

$$\boxed{\frac{-2x^6+x^4+1}{x^3-x^2} \underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{x^2}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to0} \frac{-2x^6+x^4+1}{x^3-x^2} = -\infty}$$

b) $x \mapsto \dfrac{\ln(x)+4x+1}{2\sqrt{x}+3\ln(x)}$

- En $+\infty$. On a,

$$\boxed{\frac{\ln(x)+4x+1}{2\sqrt{x}+3\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4x}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)+4x+1}{2\sqrt{x}+3\ln(x)} = +\infty}$$

- En 0. On a,

$$\boxed{\frac{\ln(x)+4x+1}{2\sqrt{x}+3\ln(x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{\ln(x)}{3\ln(x)} = \frac{1}{3}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to0} \frac{\ln(x)+4x+1}{2\sqrt{x}+3\ln(x)} = \frac{1}{3}}$$

c) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

- En $+\infty$. On a,

$$\boxed{\frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x^2-1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x} \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}} = +\infty}$$

- En 0. On a,

$$\boxed{\frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}} \underset{x\to0}{\sim} 1} \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 1}$$

d) $x \mapsto \dfrac{1+2x^2}{(1+2x^2)^3}$

- En $+\infty$. On a,

$$\boxed{\frac{1+2x^2}{(1+2x^2)^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x^2}{(2x^2)^3} = \frac{1}{4x^4}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2x^2}{(1+2x^2)^3} = 0}$$

- En 0. On a,

$$\boxed{\frac{1+2x^2}{(1+2x^2)^3} \underset{x\to 0}{\sim} 1} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1+2x^2}{(1+2x^2)^3} = 1}$$

e) $x \mapsto \dfrac{4}{(2x-3)(2x+6)}$

- En $+\infty$. On a,

$$\boxed{\frac{4}{(2x-3)(2x+6)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4}{2x\times 2x} = \frac{1}{x^2}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{(2x-3)(2x+6)} = 0}$$

- En 0. On a,

$$\boxed{\frac{4}{(2x-3)(2x+6)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4}{-3\times 6} = -\frac{2}{9}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{4}{(2x-3)(2x+6)} = -\frac{2}{9}}$$

f) $x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^8}}$

- En $+\infty$. On a,

$$\boxed{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^8}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{\sqrt{x^8}} = \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^8}} = 0}$$

- En 0. On a,

$$\boxed{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^8}} \underset{x\to 0}{\sim} x^2} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^8}} = 0}$$

Exercice 16 – Equivalents et limites. Donner un équivalent simple des termes suivants et en déduire leurs limites.

a) $x \mapsto x(x+1)(x+2)\dots(x+p)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ en 0 et en $+\infty$

- En $+\infty$. On a,

$$\boxed{x(x+1)(x+2)\dots(x+p) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times x\times\dots\times x = x^{p+1}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} x(x+1)(x+2)\dots(x+p) = +\infty}$$

- En 0. On a,

$$\boxed{x(x+1)(x+2)\dots(x+p) \underset{x\to 0}{\sim} x\times 1\times 2\times\dots\times p = p!\times x} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} x(x+1)(x+2)\dots(x+p) = 0}$$

b) $x \mapsto \sqrt{2+x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ en $+\infty$

- En $+\infty$. On a,

$$\boxed{\sqrt{2+x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\times\frac{1}{x^2}\times\frac{2}{x} = \frac{2}{x^{\frac{5}{2}}}}$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2+x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = 0}$$

c) $x \mapsto \left(e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1\right)\sin\left(\frac{4}{x^2}\right)$ en $+\infty$

- En $+\infty$. Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ par cc, on a,

$$\boxed{\left(e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1\right)\sin\left(\frac{4}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x}\times\frac{4}{x^2} = \frac{4\ln(x)}{x^3}}$$

donc, par croissances comparées

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1\right)\sin\left(\frac{4}{x^2}\right) = 0}$$

d) $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}} - x$ en $+\infty$

- En $+\infty$. On a,

$$\boxed{xe^{\frac{1}{x}} - x = x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times\frac{1}{x} = 1}$$

donc,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}} - x = 1}$$

e) $x \mapsto \dfrac{\cos(4x)\ln(1+x^2)}{\sin(x^2)\cos(x)}$ en 0

- En 0. On a,

$$\boxed{\frac{\cos(4x)\ln(1+x^2)}{\sin(x^2)\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1\times x^2}{x^2\times 1} = 1}$$

donc,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\cos(4x)\ln(1+x^2)}{\sin(x^2)\cos(x)} = 1}$$

f) $x \mapsto \dfrac{\ln(x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}\ln(1+x)\sin(3x)}$ en 0

- En 0. On a,

$$\boxed{\frac{\ln(x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}\ln(1+x)\sin(3x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)\times 1}{\sqrt{x}\times x\times 3x} = \frac{\ln(x)}{3x^{\frac{5}{2}}}}$$

donc,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}\ln(1+x)\sin(3x)} = -\infty}$$

g) $x \mapsto \dfrac{\sin(4x)}{\sin(2x)}\cos(x)$ en 0

- En 0. On a,

$$\boxed{\frac{\sin(4x)}{\sin(2x)}\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4x}{2x}\times 1 = 2}$$

donc,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(2x)}\cos(x) = 2}$$

h) $x \mapsto \dfrac{e^{2x}\sin(x)}{x}$ en 0

- En 0. On a,

$$\boxed{\frac{e^{2x}\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{e^{2x}\times x}{x} = e^{2x}}$$

donc,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\sin(x)}{x} = 1}$$

Exercice 17 – Montrer que $\ln(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln(x))$. En déduire la limite de

$$x \longmapsto \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} \quad \text{en} \quad +\infty$$

On pourra passer par la forme exponentielle.

Par composées de limites et par croissances comparées, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0.$$

Donc $\ln(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln(x))$. Pour $x \geq 1$, on a

$$\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} = e^{\frac{\ln(\ln(x))-\ln(x)}{x}}.$$

Or $\ln(\ln(x)) - \ln(x) \sim_{+\infty} -\ln(x)$ d'après la question précédente. Donc

$$\frac{\ln(\ln(x)) - \ln(x)}{x} \sim_{+\infty} -\frac{\ln(x)}{x}.$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(x)) - \ln(x)}{x} = 0$ et par composée de limites $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} = 1$.

Exercice 18 – Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}(3n^2+1)\sin\left(\frac{2}{n}\right)(e^{\frac{1}{n}}-1) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0^+}(1+2x^2)^{\frac{1}{x}}.$$

On pourra commencer par déterminer un équivalent.

Procédons à l'aide d'équivalents :

$$(3n^2+1)\sin\left(\frac{2}{n}\right)(e^{1/n}-1) \sim_{+\infty} 3n^2 \times \frac{2}{n}\frac{1}{n} \sim_{+\infty} 6$$

$$\forall x>0, \quad (1+2x^2)^{1/(2x)} = e^{\frac{\ln(1+2x^2)}{2x}}$$

et $\frac{\ln(1+2x^2)}{2x} \sim_0 x$. Donc $(1+2x^2)^{1/(2x)} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} e^0=1$

Exercice 19 – Donner la limite dans des suites définies pour $n \geq 2$ par :

a) $u_n = \sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$

b) $u_n = n^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \sin(n!)$

c) $u_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $(x \neq 0)$

d) $u_n = \left(\dfrac{n^2+5n+2}{n^2-7n+4}\right)^n$

e) $u_n = \dfrac{n^2+\sin n}{\sqrt{n}+\cos n}$

f) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-\ln(n^3)}$

g) $u_n = \dfrac{\ln(\cos(a/n))}{\ln(\cos(b/n))}$ où $a, b \in \mathbb{R}^*$

h) $u_n = \dfrac{\sin(1/n)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n^2}}$

On pourra commencer par déterminer un équivalent.

5 Pour aller plus loin

Exercice 20 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation
$$x^3 + nx - 1 = 0,$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, possède une unique solution. On la note u_n.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$
En déduire la limite de $(u_n)_n$.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^3}{n}.$$
En déduire que
$$u_n - \frac{1}{n} =_{+\infty} O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$
4. On pose pour tout $n \geq 1$, $y_n = u_n - \dfrac{1}{n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$ny_n = -u_n^3,$$
et en déduire que $y_n = -\dfrac{1}{n^4} + O\left(\dfrac{1}{n^7}\right)$.
5. En déduire un développement asymptotique de (u_n) à deux termes.

1. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x^3 + nx - 1$. Alors f est dérivable car polynomiale et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\quad f'(x) = 3x^2 + n > 0$ et $f'(0) \geq 0$ donc f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Donc, d'après le théorème de la bijection monotone, f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et 0 admet un unique antécédent par f.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $f(0) = -1$ donc par stricte croissance de f, $u_n \geq 0$. De plus, $u_n^3 + nu_n - 1 = 0$ donc $u_n = \dfrac{1 - u_n^3}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. Donc, par théorème d'encadrement, (u_n) converge vers 0.
3. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^3}{n}$$
et $u_n = O(1/n)$. Donc $u_n^3 = O(1/n^3)$ et
$$u_n - \frac{1}{n} = O(\frac{1}{n^4}).$$
4. On a clairement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$ny_n = -u_n^3$$
et
$$u_n^3 = \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)^3 = \frac{1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^6}\right).$$
Donc $y_n = -\dfrac{1}{n^4} + O\left(\dfrac{1}{n^7}\right)$.
5. On en déduit
$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^7}\right).$$