27. Bases et dimension

1 Familles de vecteurs

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K}$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Rappel : famille génératrice

Définition 1.1 Soient $\vec{x}_1$, ..., $\vec{x}_n$ des vecteurs de E. On dit que la famille $(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)$ est une **famille génératrice de** E si

$$E = \mathrm{Vect}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)$$

Autrement dit, tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}_1$, ..., $\vec{x}_n$:

$$\forall \vec{x} \in E \quad \exists (\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_p\vec{x}_p$$

La première méthode pour déterminer une famille génératrice est d'écrire l'espace comme un vect.

Exemple 1.2 Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et exhiber une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ telle que F est l'espace vectoriel engendré par cette famille. *Faire une illustration graphique.*

Exemple 1.3 Donner une famille génératrice de $G = \{(a+b)X^2 - (b-c)X + a + 2c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

La deuxième méthode pour démontrer qu'une famille donnée est génératrice d'un espace est de montrer que n'importe quel élément peut s'écrire comme une combinaison linéaire de cette famille.

Exemple 1.4 Soient $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (2,3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que (e_1, e_2) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. *Faire une illustration graphique.*

Le résultat suivant permet «d'agrandir» facilement une famille génératrice.

Proposition 1.5 Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.

Exemple 1.6 Montrer que la famille $((1,0),(0,1),(1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

1.2 Famille libre/liée

L'objectif est de se demander si, connaissant une famille génératrice, tous les vecteurs de cette famille sont indispensables ou si certains sont redondants car combinaisons linéaires des autres. Il s'agit de l'étude de la *liberté* d'une famille.

Définition 1.7 Soient $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p$ des éléments de E. On dit que la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ est **libre** (ou que les vecteurs $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p$ sont **linéairement indépendants**) si

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \text{si } \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_p \cdot \vec{x}_p = \vec{0}_E \quad \text{alors} \quad \forall i \in [\![1,p]\!] \ \lambda_i = 0$$

Dire qu'une famille est libre signifie qu'aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Exemple 1.8 Soient $u_1 = (1,2,3)$ et $u_2 = (-1,4,6)$. Montrer que la famille (u_1, u_2) est libre.

Exemple 1.9 Montrer que la famille $(\sin, \cos)$ est libre dans $C^1(\mathbb{R})$.

Définition 1.10 Soit $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p)$ une famille d'éléments de E. On dit que la famille $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p)$ est **liée** si elle n'est pas libre. Autrement dit, il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1\cdot\vec{x}_1+\dots+\lambda_p\cdot\vec{x}_p=\vec{0}_E$ et au moins l'un des λ_i est non nul, c'est-à-dire au moins un des vecteurs est une combinaison linéaire des autres.

Démonstration. S'il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1\cdot\vec{x}_1+\dots+\lambda_p\cdot\vec{x}_p=\vec{0}_E$$

avec au moins l'un des λ_i est non nul, par exemple $\lambda_1 \neq 0$ alors

$$\vec{x}_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\vec{x}_2+\cdots+\frac{\lambda_p}{\lambda_1}\cdot\vec{x}_p$$

et $\vec{x}_1$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs. ■

Exemple 1.11 Soient $u_1=(1,-1,1)$ et $u_2=(2,-2,2)$. Montrer que la famille (u_1,u_2) est liée.

Exemple 1.12 Soient $P_1=1+2X-X^2$, $P_2=1+X^2$ et $P_3=-1+2X-3X^2$. Montrer que la famille (P_1,P_2,P_3) est liée dans $\mathbb{R}[X]$.

La proposition suivante autorise à identifier les coefficients dans les combinaisons linéaires de familles libres.

Proposition 1.13 — Principe d'identification des scalaires. Soit $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ une famille libre de E. Pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^n$ et tout $(\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{K}^n$,

$$\lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_p \cdot \vec{x}_p = \mu_1 \cdot \vec{x}_1 + \ldots + \mu_p \cdot \vec{x}_p \quad \text{alors} \quad \forall i \in [\![1, p]\!] \;\; \lambda_i = \mu_i.$$

! Cette identification est fausse si les vecteurs apparaissant dans l'égalité ne forment pas une famille libre. Par exemple, dans l'égalité suivante, les coefficients ne sont pas identifiables.

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.14 Soit (e_1, e_2) une famille libre dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ mais que la famille $(e_1 + e_2, -e_1 - e_2)$ n'est pas libre dans $\mathbb{R}^2$.

Pour les polynômes, on dispose d'un critère pratique pour montrer qu'une famille est libre.

Proposition 1.15 Soient P_1, …, P_n des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est **à degrés échelonnés** si

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \ldots < \deg(P_n)$$

Toute famille finie de polynômes à degrés échelonnés est libre.

Exemple 1.16 Montrer que la famille $(1 + X, 2X + X^2, 2 + X^3)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 1.17 — Cas particuliers.

1. Toute famille contenant le vecteur nul $\vec{0}_E$ est liée.
2. Une famille d'un seul vecteur $(\vec{x}_1)$ est libre si et seulement si $\vec{x}_1 \neq \vec{0}_E$.
3. Une famille de deux vecteurs $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ est libre si et seulement si $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ ne sont pas colinéaires.
4. Dans une famille libre, aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres vecteurs.

Exemple 1.18 Dire *rapidement* si les familles suivantes sont libres ou non.

a) $((0,0,0))$

b) $((1,0,-1))$

c) $((1,2),(1,1))$

d) $((1,1),(-2,-2))$

e) $((1,0),(0,0))$

f) $((1,0),(0,1),(1,1))$

Dire qu'une famille est libre revient à dire qu'aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres. Ainsi, si l'on veut que l'ajout d'un vecteur conserve la liberté d'une famille libre, il est nécessaire de ne pas introduire de dépendance entre ses vecteurs, autrement dit veiller à n'ajouter que des vecteurs linéairement indépendants de ceux déjà présents.

Proposition 1.19 — Rétrécissement ou agrandissement d'une famille libre.

1. Toute famille de vecteurs contenue dans une famille libre est libre.
2. Toute famille contenant une famille liée est liée.
3. Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille libre de E. Soit $\vec{x} \in E$. Si $\vec{x} \notin \mathrm{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ (autrement dit $\vec{x}$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ alors la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{x})$ est libre.

1.3 Base

Définition 1.20 Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est une **base** de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Exemple 1.21 Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$F = \mathrm{Vect}((1,0),(1,1),(3,-2))$$

Exemple 1.22 Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$.

Proposition 1.23 Soit $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de E. La famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ est une base si et seulement s'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n.$$

Dans ce cas, le n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est appelé les **coordonnées** de $\vec{x}$ dans la base $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.

Démonstration.

- Famille **génératrice** = **existence** pour tout vecteur d'une décomposition comme combinaison linéaire
- Famille **libre** = **unicité** des coefficients dans les combinaisons linéaires (ce qui autorise les identifications)

■

Exemple 1.24 Soient $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Puis déterminer les coordonnées du vecteur $(2, 1, -1)$ dans cette base.

Voici les **bases canoniques** *(à connaître)* des espaces vectoriels de référence. Le qualificatif «canonique» doit être compris au sens de «la plus naturelle». De fait, les bases exhibées ci-dessous sont les plus faciles d'emploi auxquelles on peut penser dans $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

E	Décomposition	Base canonique
$\mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
$\mathbb{R}^3$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
$\mathbb{K}^n$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
$\mathbb{K}_n[X]$	$P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$	$(1, X, X^2, \ldots, X^n)$
$\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	$(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j} E_{i,j}$ où $E_{i,j}$ est la matrice avec que des 0 et un unique 1 en position (i,j)	$(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$
$\mathbb{C}$	$z = \mathrm{Re}(z) \times 1 + \mathrm{Im}(z) \times i$	$(1, i)$

Exemple 1.25 Donner les coordonnées du vecteur $u = (2, 1, -1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 1.26 On admet que la famille $\mathcal{B} = (X^2, X^2+1, X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner les coordonnées de $P = X^2 + 2X - 1$ dans cette base, ainsi que dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2 Espaces vectoriels de dimension finie

2.1 Notion de dimension

Définition 2.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de **dimension finie** si E possède une famille génératrice finie.

Dire qu'un espace vectoriel est de dimension finie signifie donc qu'il est engendré par un nombre fini de vecteurs (ce qui ne veut pas dire qu'il contient un nombre fini de vecteurs).

Exemple 2.2 Dire si les espaces vectoriels suivants sont de dimension finie ou non.

a) $\mathbb{R}^2$

b) $\mathbb{R}^3$

c) $\mathbb{R}_2[X]$

d) $\mathbb{R}[X]$

e) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

f) $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

2.2 Existence d'une base

Proposition 2.3 Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors toute famille libre contenue dans $\mathcal{G}$ peut être complétée avec des éléments de $\mathcal{G}$ en une base de E.

Idée de preuve. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre contenue dans la famille génératrice $\mathcal{G}$. Tant que $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice, on peut trouver un élément $\vec{x} \in \mathcal{G}$ tel que $\mathcal{L} \cup \{\vec{x}\}$ reste libre et on complète alors la famille $\mathcal{L}$ avec ce vecteur. La famille $\mathcal{G}$ étant finie, la famille $\mathcal{L}$ finira par être génératrice. Libre et génératrice, cette famille est alors une base de E. ■

Théorème 2.4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $E \neq \{\vec{0}_E\}$.

- **Théorème de la base extraite :** De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.
- **Théorème de la base incomplète :** Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Exemple 2.5 Soit $E = \text{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(1,1,0))$. Extraire de la famille $((1,0,0),(0,1,0),(1,1,0))$ une base de E.

Exemple 2.6 Soit $E = \mathbb{R}^2$. Compléter la famille $((1,0))$ en une base.

Proposition 2.7 Tout espace vectoriel $E \neq \{\vec{0}_E\}$ de dimension finie admet une base.

2.3 Nombre d'éléments d'une base et dimension

Proposition 2.8 Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de degrés de liberté dont on dispose pour construire un objet de cet espace.

Théorème 2.9 Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie sont finies et ont toutes le même nombre d'éléments, appelé **dimension** de E, noté $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

À partir des bases canoniques des espaces vectoriels de référence, on obtient leur dimension.

Proposition 2.10 Les dimensions des espaces vectoriels de référence sont les suivantes.

a) $\dim \mathbb{K}^n = n$

b) $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$

c) $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$

d) $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

Exemple 2.11 Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels suivants. *On ne demande pas ici de justifier (mais il faut savoir le faire...).*

Ensemble ambiant	Sev	Dimension
	$\text{Vect}((1,1))$	
	$\text{Vect}((0,0))$	
	$\text{Vect}(X,1)$	
	$\text{Vect}((1,1),(2,2))$	
	$\text{Vect}((1,1),(-1,1))$	
	$\text{Vect}(1,X,1+X)$	

Exemple 2.12 Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels suivants. *On ne demande pas ici de justifier (mais il faut savoir le faire...).*

Sev	Ecriture en vect	Dim.
$\{(t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$		
$\{a+bX^2 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$		
$\{(a+b,a+b,a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$		
$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$		

Exemple 2.13 Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels suivants. *On ne demande pas ici de justifier (mais il faut savoir le faire...).*

Sev	paramétrique	Vect	Dim.
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$			
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=-y\}$			
$\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0)=0\}$			

Proposition 2.14 — EDLH du premier ordre. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1

$$y' + a(x)y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$:

$$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(x \longmapsto \mathrm{e}^{-\int^x a(t)\mathrm{d}t})$$

où $x \mapsto \int^x a(t)\mathrm{d}t$ désigne une primitive de a sur I.

Proposition 2.15 — EDL du second ordre à coefficients constants. Soient a, b, c trois constantes. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = 0$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. En notant $\Delta = b^2 - 4ac$, on a

$\Delta > 0$	Racines réelles distinctes r_1 et r_2	$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}, x \mapsto \mathrm{e}^{r_2 x})$
$\Delta = 0$	Racine double r_1	$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}, x \mapsto x\mathrm{e}^{r_1 x})$
$\Delta < 0$	Racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$	$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x), x \mapsto \mathrm{e}^{rx}\sin(\omega x))$.

Proposition 2.16 — Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. En notant $\Delta = b^2 - 4ac$, on a

$\Delta > 0$	Racines réelles distinctes r_1 et r_2	$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$
$\Delta = 0$	Racine double r_1	$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr_1^n)_{n\in\mathbb{N}})$
$\Delta < 0$	Racines complexes conjuguées $\rho\mathrm{e}^{\pm i\theta}$	$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}((\rho^n\cos(\theta n))_{n\in\mathbb{N}}, (\rho^n\sin(\theta n))_{n\in\mathbb{N}})$.

2.4 Caractérisation des bases en dimension finie

Proposition 2.17 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- Toute famille libre possède au plus n éléments.
- Toute famille génératrice possède au moins n éléments.
- Une base de E possède exactement n éléments.

Proposition 2.18 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- Une famille contenant strictement plus de n éléments est liée.
- Une famille contenant strictement moins de n éléments n'est pas génératrice.

Exemple 2.19 Dire si les familles suivantes ne sont pas libres/génératrices en «faisant de la comptabilité».

Famille	Espace ambiant	Libre	Génére l'esp. ambiant
$\mathcal{F} = ((18,-63),(5,-6),(17,-48))$			
$\mathcal{F} = ((1,2,3),(7,2,4))$			
$\mathcal{F} = ((1,2),(3,4),(5,6))$			

Proposition 2.20 Soit $\mathcal{B}$ une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. La famille $\mathcal{B}$ est une base ddès lors que deux des trois propriétés suivantes sont vérifiées :
1. La famille $\mathcal{B}$ est libre dans E.
2. La famille $\mathcal{B}$ est génératrice de E.
3. La famille $\mathcal{B}$ contient n éléments.

Cette proposition est très utilisée en pratique pour démontrer qu'une famille est une base d'un espace **dont on connait déjà la dimension.**

Exemple 2.21 Soient $P_1 = (X-1)(X-2)(X-3)$, $P_2 = X(X-2)(X-3)$, $P_3 = X(X-1)(X-3)$ et $P_4 = X(X-1)(X-2)$. Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Proposition 2.22 Toute famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de $n+1$ polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ à degrés échelonnés forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

3 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

3.1 Lien inclusion et dimension

Proposition 3.1 Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et

$$\dim F \leq \dim E \quad \text{avec égalité si et seulement } E = F$$

Exemple 3.2 Caractérisons les sous-espaces vectoriels possibles de $\mathbb{R}^2$.

Dimension possible	Sous-espace vectoriel

Le résultat suivant propose une méthode pour montrer l'égalité de deux espaces vectoriels.

Proposition 3.3 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.

Ainsi, pour montrer l'égalité de deux sev F et G, on peut
- Soit raisonner par équivalence, c'est-à-dire montrer que $x \in F$ si et seulement si $x \in G$.
- Soit procéder par double inclusion, c'est-à-dire montrer que $F \subset G$ et $G \subset F$
- Soit montrer que
    1. une des deux inclusions est vraie (on choisit l'inclusion «la plus facile» à démontrer)
    2. les deux espaces ont la même dimension

Exemple 3.4 Soient $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{e}_1 = (1,0,1)$ et $\vec{e}_2 = (-1,0,2)$. Montrons que $\mathrm{Vect}(\vec{i},\vec{k}) = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

3.2 Lien somme et inclusion

Théorème 3.5 — Formule de Grassmann. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors $F+G$ est de dimension finie et

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Visualisation géométrique dans le plan et dans l'espace.

Proposition 3.6 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors F et G sont en somme directe si et seulement si

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Démonstration. On rappelle que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$. Ainsi, la formule est une conséquence directe de la formule de Grassmann. ■

Proposition 3.7 Soit $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \ldots, \vec{x}_n)$ une famille libre de E. Alors $F = \text{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ et $G = \text{Vect}(\vec{x}_{m+1}, \ldots, \vec{x}_n)$ sont en somme directe.

Démonstration. On veut montrer que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $x \in F \cap G$.

- D'une part, comme $x \in F$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tel que

$$x = \lambda_1 \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_m \vec{x}_m$$

- D'autre part, comme $x \in G$, il existe $\mu_{m+1}, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tel que

$$x = \mu_m \vec{x}_{m+1} + \ldots + \mu_n \vec{x}_n$$

Ainsi,

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \ldots + \lambda_m \vec{x}_n - \mu_1 \vec{x}_m - \ldots - \mu_n \vec{x}_n = \vec{0}_E$$

Comme la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \ldots, \vec{x}_n)$ est libre dans E, on peut identifier les coefficients :

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \mu_{m+1} = \ldots = \mu_n = 0$$

et donc $x = 0$. Ainsi, $F \cap G = \{0_E\}$ et les ensembles F et G sont en somme directe. ■

Proposition 3.8 — Base adaptée. Soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, ie $E = F \oplus G$. Si $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ est une base de F et $(\vec{x}_{m+1}, \ldots, \vec{x}_n)$ est une base de G alors la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \ldots, \vec{x}_n)$ est une base de E, appelée **base adaptée** à la décomposition $E = F \oplus G$.

Proposition 3.9 — Existence d'un supplémentaire. Soit F un sous-espace vectoriel de E avec E dimension finie. Alors il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$. Autrement dit, F possède un supplémentaire dans E. De plus, tous les supplémentaires de F dans E ont la même dimension, égale à $\dim(E) - \dim(F)$.

Exemple 3.10 Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,1))$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3.11 Dans $\mathbb{R}_4[X]$, soit $F = \mathrm{Vect}(1, 1+X^2)$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Proposition 3.12 Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E avec E de dimension finie. Les espaces F et G sont supplémentaires dans E, ie $E = F \oplus G$ dès lors que deux des trois propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $E = F + G$
2. $F \cap G = \{0\}$
3. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

Exemple 3.13 Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que les sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$ sont supplémentaires.

3.3 Rang d'une famille

On ne parle pas de la dimension d'une famille de vecteurs car une famille n'est pas un espace vectoriel. Mais on peut étudier la dimension de l'espace qu'elle engendre.

Définition 3.14 Soient $\vec{x}_1$, ..., $\vec{x}_n$ des éléments de E. On appelle **rang** de la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$, noté $\text{rg}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs :

$$\text{rg}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \dim\left(\text{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)\right)$$

Proposition 3.15 Soient $\vec{x}_1$, ..., $\vec{x}_p$ des éléments de E. Alors

- $\text{rg}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) \leq p$
- $\text{rg}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) = p$ si et seulement si la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ est libre.

Proposition 3.16 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $\vec{x}_1$, ..., $\vec{x}_p$ des éléments de E. On a

- $\text{rg}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) \leq n$,
- $\text{rg}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) = n$ si et seulement si la famille $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ est génératrice de E.

Exemple 3.17 Déterminer le rang des familles suivantes.

Famille	Ensemble associé F	Base de F	Rang
$\mathcal{F} = ((1,0),(1,1),(3,-2))$			
$\mathcal{F} = ((2,1,0),(-1,0,1))$			
$\mathcal{F} = (1,X,X^2,X^3)$			
$\mathcal{F} = (X,2X,4X)$			