TD 27 – Bases et dimension

1 Famille libre

Exercice 1 – Montrer que les familles suivantes sont libres.

a) $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ (dans $\mathbb{R}^3$)

b) $((1,1,0),(0,1,1))$ (dans $\mathbb{R}^3$)

c) $(X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ (dans $\mathbb{R}[X]$)

d) $(1, x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x})$ (dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$)

e) $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$ (dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$)

Exercice 2 – Question ouverte. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

a) $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$

b) $((1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$

c) (X, X^2-X, X^2+X) dans $\mathbb{R}_2[X]$

d) $(\sin, \cos, x \mapsto x\sin(x))$ dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

e) $((1)_{n\in\mathbb{N}}, (n^2)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ dans l'espace des suites réelles

f) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 3 – Soient $u=(1,1,m)$, $v=(0,1,2)$ et $w=(1,0,3)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel m pour que la famille (u,v,w) soit libre.

Exercice 4 – Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$: $A^p = 0_n$ et $A^{p-1} \neq 0_n$. Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{p-1})$ est libre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5 – Soit (e_1,e_2,e_3,e_4) une famille libre d'un espace vectoriel E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

a) (e_1,e_4)

b) (e_1)

c) $(e_2+e_3, e_3, e_4, -e_2+2e_3)$

d) $(2e_1-e_2, e_2+e_3, e_3-e_4, e_4)$

2 Bases

Exercice 6 – En montrant une décomposition unique.

1. Montrer que $((1,2),(-1,3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ puis déterminer les coordonnées de $(-1,3)$ dans cette base.
2. Montrer que $((1,0,1),(2,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer les coordonnées de $(1,-2,3)$ dans cette base.

Exercice 7 – Par extraction.

a) On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1=(1,2,0)$, $u_2=(0,0,3)$, $u_3=(1,2,3)$ et $u_4=(-2,-4,1)$. Déterminer une base de $F=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

b) Montrer que la famille

$$((1,0,1),(1,1,1),(1,2,3),(3,2,1),(1,-1,1))$$

est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. En extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 – En écrivant les ensembles comme un Vect puis extraction. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

a) $F_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2y=0\}$

b) $F_2 = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0, x+2y+3z+4t=0\}$

c) $F_3 = \{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P(1)=0\}$

d) $F_5 = \{P\in\mathbb{R}_2[X] \mid \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t=0\}$

e) $F_6 = \{f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f''=0\}$

Exercice 9 – Théorème de la base incomplète.

1. Justifier que la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1=(1,1,1,1)$ et $\vec{e}_2=(1,1,-1,-1)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que la famille (X^2+1, X^2+X) est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3 Dimension

Exercice 10 – Dimension d'un Vect. Dans chaque cas, déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

a) $F=\mathrm{Vect}((1,1))$

b) $F=\mathrm{Vect}((1,1),(-1,-1))$

c) $F=\mathrm{Vect}((1,2),(-1,2))$

d) $F=\mathrm{Vect}((0,0))$

e) $F=\mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,0),(2,2,2))$

f) $F=\mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$

Exercice 11 – Dimension d'un ensemble définie de manière conditionnelle. Dans chaque cas, déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

a) $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\right\}$

b) $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y=y+z=0 \text{ et } z+t=0\right\}$

c) $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X] | P(1)=P'(1)=P''(1)=0\}$

d) $F=\{M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM=0_2\}$ où $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 12 – Dimension d'un ensemble définie de paramétrique. Dans chaque cas, déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

a) $F=\{(x,0) \mid x\in\mathbb{R}\}$

b) $F=\{(3a-5b, 2a, a+b) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

c) $F=\{x\mapsto (ax^2+bx+c)\cos(x) | a,b,c\in\mathbb{R}\}$

Exercice 13 – Soient $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0\right\}$ et $G=\mathrm{Vect}((0,1,1),(-1,1,-1))$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la dimension de F et de G.
3. Déterminer la dimension de $F\cap G$.
4. Déterminer la dimension de $F+G$.

Exercice 14 – Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$F=\{(x_1, \dots, x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1+\dots+x_n=0\}.$$

On pourra commencer par étudier les cas $n=2$ et $n=3$.

4 Utilisation de la notion de dimension

Exercice 15 – Pour montrer que deux ensembles sont égaux. On considère les ensembles

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z = x-4t+2z = 0\}$$
$$F = \mathrm{Vect}\big((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)\big)$$

1. Déterminer la dimension de E.
2. Déterminer la dimension de F.
3. Montrer que $E = F$.

Exercice 16 – Pour montrer qu'une famille est une base. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

a) Montrer que la famille $((1,2),(3,4))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (en étant le plus *efficace* possible).

b) Montrer que la famille $((1,0,1),(0,1,0),(1,2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (en étant le plus *efficace* possible).

c) Montrer que la famille $(1,X,X(X-1),X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer les coordonnées de X^3 dans cette base.

d) Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, puis déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 17 – Pour montrer qu'une famille est une base. Déterminer à quelle·s condition·s sur le réel a, la famille suivante est une base de $\mathbb{R}^3$: $((1,-1,0),(2,-1,2),(1,0,a))$

Exercice 18 – On considère l'ensemble

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0 \text{ et } x-y+2z-2t = 0\}.$$

On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de F.
2. En déduire la dimension de F.
3. On considère la famille $\mathscr{B} = ((0,-4,1,3),(3,-1,-2,0))$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre.
   (b) En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de F.

5 Somme et sous-espace supplémentaires

Exercice 19 – Démontrer que les espaces suivants sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E (en vous appuyant sur un argument de dimension).

1. Dans $E = \mathbb{R}^4$, $F_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y = 0 \text{ et } x+y-2z = 0\}$ et $G_1 = \mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u} = (1,0,0,0)$ et $\vec{v} = (1,1,0,0)$.
2. Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P'(1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(X^3+1)$.
3. Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,

$$F_3 = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a-c+d = b+c-d = 0\right\}$$
$$G_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\-2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3\\4&1\end{pmatrix}\right)$$

Exercice 20 – Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+2z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels et en déterminer des familles génératrices.
2. Déterminer une famille génératrice de $F \cap G$. A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^3$?
3. Soit $H = \mathrm{Vect}((1,0,0))$. Montrer que $F \oplus H = G \oplus H = \mathbb{R}^3$.

Exercice 21 –

1. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x+y+2z = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$. Déterminer un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer un supplémentaire de $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(X) = P(-X)\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 22 – Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère $F = \mathrm{Vect}(A)$ avec $A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $G = \mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de E.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, puis déterminer leur dimension.
2. Expliciter $F+G$. La somme est-elle directe? F et G sont-ils supplémentaires?
3. Déterminer un supplémentaire de G dans E.

Exercice 23 – On considère les polynômes suivants:
$P_0 = X^2-2$, $P_1 = (X-1)(X+1)$, $P_2 = (X-2)(X+1)$ et $P_3 = (X-1)(X+2)$.

1. La famille (P_0,P_1,P_2,P_3) est-elle libre dans $\mathbb{R}_2[X]$?
2. Montrer que la famille (P_1,P_2,P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer les coordonnées de P_0 dans la base (P_1,P_2,P_3).
4. Déterminer un supplémentaire de $F = \mathrm{Vect}(P_1,P_2,P_3)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 24 –

1. Calculer la dimension de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ et de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$. Plus généralement, proposer une expression de $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))$ et de $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))$ en fonction de n.
2. En utilisant un argument de dimension, en déduire que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

6 Rang d'une famille

Exercice 25 – Déterminer le rang des familles suivantes, et indiquer si chaque famille est libre, génératrice ou une base de E.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $((1,1,0),(2,1,1))$
2. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $(X^2+X+3, X^2-X-3, 2X^2-X-6)$
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $(-1+X, 2+X^2, 1+X+X^2)$
4. $E = \mathbb{R}^3$, $((1,-1,1),(-1,1,-1),(0,1,1),(1,0,2)$
5. $E = \mathbb{R}^4$, $((1,1,0,1),(1,-1,1,0),(2,0,1,1),(0,-2,1,-1))$

7 Approfondissement

Exercice 26 – Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Rappeler la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Justifier que la famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2})$ est liée.
3. En déduire l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(A) = 0_n$.

Exercice 27 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel et en déterminer une base.