TD 03 – Nombres complexes : étude algébrique

1 Nombres complexes sous forme algébrique

Exercice 1 – Opérations sur les nombres complexes. On pose $z_1 = 5-2i$ et $z_2 = -2+4i$. Effectuer les calculs suivants. *On donnera le résultat sous forme algébrique.*

a) $z_1 + z_2$

On a,

$$\boxed{z_1+z_2} = 5-2i+-2+4i$$
$$\boxed{= 3+2i}$$

b) $z_1 - z_2$

On a,

$$\begin{aligned}\boxed{z_1-z_2} &= 5-2i-(-2+4i)\\ &= 5-2i+2-4i\\ &\boxed{= 7-6i}\end{aligned}$$

c) $4z_1$

On a,

$$\boxed{4z_1} = 4(5-2i)$$
$$\boxed{= 20-8i}$$

d) $z_1 \times z_2$

On a,

$$\begin{aligned}\boxed{z_1\times z_2} &= 5-2i\times(-2+4i)\\ &= -10+20i+4i-8i^2\\ &= -10+24i+8\\ &\boxed{= -2+24i}\end{aligned}$$

e) z_1^2

On a,

$$
\begin{aligned}
\boxed{z_1^2} &= (5-2i)^2 \\
&= 25 - 20i + (2i)^2 \\
&= 25 - 20i - 4 \\
&\boxed{= 21 - 20i}
\end{aligned}
$$

f) $\frac{1}{z_1}$

On a,

$$
\begin{aligned}
\boxed{\tfrac{1}{z_1}} &= \frac{1}{5-2i} \\
&= \frac{5+2i}{(5-2i)(5+2i)} \\
&= \frac{5+2i}{25+4} \\
&\boxed{= \tfrac{5}{29} + i\tfrac{2}{29}}
\end{aligned}
$$

g) $\frac{z_1}{z_2}$

On a,

$$
\begin{aligned}
\boxed{\tfrac{z_1}{z_2}} &= \frac{5-2i}{-2+4i} \\
&= \frac{(5-2i)(-2-4i)}{(-2+4i)(-2-4i)} \\
&= \frac{-10-20i+4i+8i^2}{4+16} \\
&= \frac{-18-16i}{20} \\
&\boxed{= -\tfrac{9}{10} - i\tfrac{4}{5}}
\end{aligned}
$$

Exercice 2 – Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $-(-2+5i)(-1-i)$

En développant, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{-(-2+5i)(-1-i)} &= -(2+2i-5i-5i^2)\\ &= -(7-3i)\\ &\boxed{= -7+3i}\end{aligned}$$

b) $(2+3i)^2-(i-1)^2$

En développant, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{(2+3i)^2-(i-1)^2} &= 4+12i-9-(-1-2i+1)\\ &= -5+12i+2i\\ &\boxed{= -5+14i}\end{aligned}$$

c) $-\dfrac{1}{i}$

En multipliant par la quantité conjuguée, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{-\frac{1}{i}} &= -\frac{1\times(-i)}{i\times(-i)}\\ &= \frac{i}{1}\\ &\boxed{= i}\end{aligned}$$

d) $\dfrac{1}{2-i}$

En multipliant par la quantité conjuguée, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{1}{2-i}} &= \frac{1\times(2+i)}{(2-i)(2+i)}\\ &= \frac{2+i}{4+1}\\ &\boxed{= \tfrac{2}{5}+i\tfrac{1}{5}}\end{aligned}$$

e) $\dfrac{3-5i}{1+i}$

En multipliant par la quantité conjuguée, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{3-5i}{1+i}} &= \frac{(3-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\\ &= \frac{3-3i-5i+5i^2}{2}\\ &= \frac{-2-8i}{2}\\ &\boxed{=-1-4i}\end{aligned}$$

f) $(1+i)^2$

En développant, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{(1+i)^2} &= 1+2i+i^2\\ &\boxed{=2i}\end{aligned}$$

g) $(1+i)^7$

En développant et en utilisant la réponse précédente, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{(1+i)^7} &= \left[(1+i)^2\right]^3 \times (1+i)\\ &= (2i)^3 \times (1+i)\\ &= -8i(1+i)\\ &\boxed{=8-8i}\end{aligned}$$

h) $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$

En utilisant la quantité conjuguée, on a déjà,

$$\begin{aligned}
\boxed{\frac{1+i}{2-i}} &= \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\
&= \frac{2+i+2i+i^2}{5} \\
&= \frac{1+3i}{5}
\end{aligned}$$

Puis, en développant, on obtient

$$\begin{aligned}
\boxed{\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2} &= \left(\frac{1}{5}+i\frac{3}{5}\right)^2 \\
&= \frac{1}{25}+\frac{6}{25}i-\frac{9}{25} \\
&\boxed{= -\tfrac{8}{25}+\tfrac{6}{25}i}
\end{aligned}$$

Exercice 3 – Les puissances de i. Simplifier i^2, i^3, i^4, i^7 et i^{2025}.

On a

$$\begin{aligned}&\boxed{i^2=-1}\\&\boxed{i^3}=i^2\times i\boxed{=-i}\\&\boxed{i^4}=(i^2)^2=(-1)^2\boxed{=1}\end{aligned}$$

On a $2025=4\times 506+1$. Donc

$$\boxed{i^{2025}}=i^{4\times 506+1}=(i^4)^{506}\times i=1^{506}\times i\boxed{=i}$$

Exercice 4 – Parties réelle/imaginaire. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants

a) $\dfrac{3+2i}{4}$

On a,

$$\frac{3+2i}{4} = \frac{3}{4} + i\frac{1}{2}$$

Donc,

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{3+2i}{4}\right) = \tfrac{3}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Im}\left(\frac{3+2i}{4}\right) = \tfrac{1}{2}}$$

b) i^3

On a, $i^3 = -i$. Donc,

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(i^3\right) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Im}\left(i^3\right) = -1}$$

c) $\dfrac{1}{i}$

On a,

$$\frac{1}{i} = -i$$

Donc,

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{i}\right) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Im}\left(\tfrac{1}{i}\right) = -1}$$

d) $\dfrac{1}{1+2i}$

On a, en multipliant par la quantité conjugée,

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}$$

Donc,

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+2i}\right) = \tfrac{1}{5}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+2i}\right) = -\tfrac{2}{5}}$$

e) $\dfrac{1+i}{2i-3}$

On a, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$\frac{1+i}{2i-3} = -\frac{1}{13} - i\frac{5}{13}$$

Donc,

$$\boxed{\operatorname{Re}\left(\frac{1+i}{2i-3}\right) = -\tfrac{1}{13}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}\left(\frac{1+i}{2i-3}\right) = -\tfrac{5}{13}}$$

Exercice 5 – Unicité de la forme algébrique.

1. Soit $z = x+2+i(-ix+x)+2i-5ix$ avec $x \in \mathbb{R}$. À quelle(s) condition(s) sur $x \in \mathbb{R}$, z est-il un nombre réel ? un imaginaire pur ?

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut commencer par remarquer que

   $$\begin{aligned} z &= x+2+i(-ix+x)+2i-5ix \\ &= 2x+2+i(-4x+2) \end{aligned}$$

   Comme x est un nombre réel, on en déduit que,

   $$\mathrm{Re}(z) = 2x+2 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = -4x+2$$

   Ainsi,

   $$\begin{aligned} \boxed{z \in \mathbb{R}} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -4x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \tfrac{1}{2}} \end{aligned}$$

   De même,

   $$\begin{aligned} \boxed{z \in i\mathbb{R}} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{x = -1} \end{aligned}$$

2. Soient $z = a^2-a-2+3ia$ et $z' = -2a+i(a^2+a+1)$ avec $a \in \mathbb{R}$. À quelle(s) condition(s) sur $a \in \mathbb{R}$ a-t-on $z = z'$?

   Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme $a \in \mathbb{R}$, en identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient,

   $$\begin{aligned} \boxed{z = z'} &\iff a^2-a-2+3ia = -2a+i(a^2+a+1) \\ &\iff \begin{cases} a^2-a-2 = -2a \\ 3a = a^2+a+1 \end{cases} \quad \text{car } a \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} a^2+a-2 = 0 \\ a^2-2a+1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (a-1)(a+2) = 0 \\ (a-1)^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \boxed{a = 1.} \end{aligned}$$

Exercice 6 – Équations dans $\mathbb{C}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

a) $(7-3i)\overline{z}-2+i=0$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a,

$$\begin{aligned}(7-3i)\overline{z}-2+i=0 &\iff (7-3i)\overline{z}=2-i\\ &\iff \overline{z}=\frac{2-i}{7-3i}\\ &\iff \overline{z}=\frac{17}{58}-i\frac{1}{58}\\ &\iff z=\frac{17}{58}+i\frac{1}{58} \qquad \text{en utilisant la qté conjuguée}\end{aligned}$$

Donc l'équation admet une unique solution donnée par $\boxed{\frac{17}{58}+i\frac{1}{58}.}$

b) $2\overline{z}+5-2i=4+i+3\overline{z}$

En raisonnant comme à la question précédente, on trouve que l'équation admet une unique solution donnée par $\boxed{1+3i.}$

c) $(1+i)z+(2-i)\overline{z}=1-2i$

Soit $z=x+iy \in \mathbb{C}$. On a,

$$\begin{aligned}(1+i)z+(2-i)\overline{z}=1-2i &\iff (1+i)(x+iy)+(2-i)(x-iy)=1-2i\\ &\iff x-y+i(x+y)+2x-y+i(-x-2y)=1-2i\\ &\iff 3x-2y-iy=1-2i\\ &\iff \begin{cases}3x-2y=1\\ -y=-2\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=\frac{5}{3}\\ y=2\end{cases}\\ &\iff =\frac{5}{3}+2i\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation admet une unique solution donnée par $\boxed{\frac{5}{3}+2i.}$

d) $(1+i)z+(1-i)\overline{z}=1$

Soit $z=x+iy\in\mathbb{C}$. En raisonnant comme à la question précédente, on trouve que,

$$\begin{aligned}(1+i)z+(1-i)\overline{z}=1 &\iff (1+i)(x+iy)+(1-i)(x-iy)=1\\ &\iff 2x-2y=1\end{aligned}$$

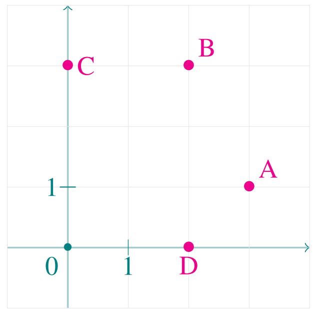
Ainsi, l'équation $(1+i)z+(1-i)\overline{z}=1$ admet une infinité de solutions sous la forme

$$z=x+iy \qquad \text{avec } x,y\in\mathbb{R} \text{ tels que } 2x-2y=1$$

ou sous la forme (autre formulation)

$$z=x+i\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad \text{avec } x\in\mathbb{R}$$

Exercice 7 – Représentation géométrique d'un nombre complexe. Donner l'affixe de chacun des points du plan représentés sur la figure.



- $\boxed{\text{Affixe de } A(3,1) : 3+i}$
- $\boxed{\text{Affixe de } B(2,3) : 2+3i}$
- $\boxed{\text{Affixe de } C(0,3) : 3i}$
- $\boxed{\text{Affixe de } D(2,0) : 2}$

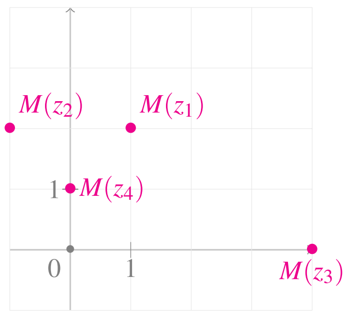
Exercice 8 – Représentation géométrique d'un nombre complexe. Représenter sur le plan l'image de chacun des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = 1 + 2i$

b) $z_2 = -1 + 2i$

c) $z_3 = 4$

d) $z_4 = i$



Exercice 9 – Conjugué. Donner le conjugué des nombres complexes suivants. *On donnera le résultat sous forme algébrique.*

a) $5-6i$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{5+6i}$

b) $5i$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{-5i}$

c) 5 conjugué $\rightarrow$ $\boxed{5}$

d) $\frac{1}{i} = -i$ en utilisant la qté conjuguée conjugué $\rightarrow$ $\boxed{i}$

e) $(1+i)^2 = 2i$ en développant conjugué $\rightarrow$ $\boxed{-2i}$

f) $\frac{2}{2+i} = \frac{4}{5} - i\frac{2}{5}$ (en utilisant la qté conjuguée) conjugué $\rightarrow$ $\boxed{\frac{4}{5}+i\frac{2}{5}}$

Exercice 10 – Conjugué. Donner le conjugué des nombres complexes suivants. *On ne donnera pas le résultat sous forme algébrique.*

a) $i(2-i)$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{-i(2+i)}$

b) $\dfrac{1-i}{1+i}$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{\frac{1+i}{1-i}}$

c) $i(4-2i)^3$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{-i(4+2i)^3}$

d) $\dfrac{i\sqrt{3}}{1+6i}$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{\frac{-i\sqrt{3}}{1-6i}}$

e) $(3-2i)(4i-1)$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{(3+2i)(-4i-1)}$

f) $\dfrac{z(1-i\overline{z})}{2z-4i\overline{z}}$ conjugué $\rightarrow$ $\boxed{\frac{\overline{z}(1+iz)}{2\overline{z}+4iz}}$

Exercice 11 – Soit $z \in \mathbb{C}$. Parmi les nombres suivants, lesquels sont réels ? imaginaires purs ? *On pourra s'aider du calcul du conjugué pour répondre à ces questions.*

Pour répondre à ces questions, on commence par calculer le conjugué du nombre complexe considéré, puis on utilise le fait que

$$z \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{z} = z$$

et que,

$$z \in i\mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{z} = -z$$

a) $1 - z\overline{z}$

On peut remarquer que

$$\overline{1 - z\overline{z}} = 1 - \overline{z}z = 1 - z\overline{z}$$

Donc $\boxed{1 - z\overline{z} \in \mathbb{R}.}$

b) $z + \overline{z}$

On peut remarquer que

$$\overline{z + \overline{z}} = \overline{z} + z = z + \overline{z}$$

Donc $\boxed{z + \overline{z} \in \mathbb{R}.}$

c) $z^2 - \overline{z}^2$

On peut remarquer que

$$\overline{z^2 - \overline{z}^2} = \overline{z}^2 - z^2 = -(z^2 - \overline{z}^2)$$

Donc $\boxed{z^2 - \overline{z}^2 \in i\mathbb{R}.}$

d) $\dfrac{z + \overline{z}}{z - \overline{z}}$

On peut remarquer que

$$\overline{\frac{z + \overline{z}}{z - \overline{z}}} = \frac{\overline{z} + z}{\overline{z} - z} = -\left(\frac{z + \overline{z}}{z - \overline{z}}\right)$$

Donc $\boxed{\dfrac{z + \overline{z}}{z - \overline{z}} \in i\mathbb{R}.}$

e) $(z - i\overline{z})(z + i\overline{z})$

De même, $\boxed{(z - i\overline{z})(z + i\overline{z}) \in \mathbb{R}}$

f) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}$

De même, $\boxed{\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}} \in \mathbb{R}}$

Exercice 12 – Calculs de module. Déterminer le module des nombres complexes suivants.

a) $\frac{5}{2}i$

On a,

$$\boxed{\left|\frac{5}{2}i\right|} = \left|0+\frac{5}{2}i\right| = \sqrt{0^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} \boxed{= \frac{5}{2}}$$

b) -3

On a,

$$\boxed{|-3|} = |-3+0i| = \sqrt{(-3)^2+0^2} \boxed{= 3}$$

c) $-4i$

On a,

$$\boxed{|-4i| = 4}$$

d) $1+i$

On a,

$$\boxed{|1+i|} = \sqrt{1^2+1^2} \boxed{= \sqrt{2}}$$

e) $1-i\sqrt{3}$

On a,

$$\boxed{\left|1-i\sqrt{3}\right|} = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} \boxed{= 2}$$

f) $\sqrt{3}+i\sqrt{2}$

On a,

$$\boxed{\left|\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right|} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2} \boxed{= \sqrt{5}}$$

g) $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$

On a,

$$\boxed{|\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)|} = \sqrt{(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2} = \sqrt{1} \boxed{= 1}$$

h) $\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$

On a,

$$\boxed{|\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)|} = \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = \sqrt{1}\ \boxed{= 1}$$

i) $(3+2i)^5$

On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\left|(3+2i)^5\right|} &= |3+2i|^5 \\
&= \left(\sqrt{3^2+2^2}\right)^5 \\
&= \sqrt{13}^5 \\
&= (\sqrt{13})^2 \times (\sqrt{13})^2 \times \sqrt{13} \\
&= 13 \times 13 \times \sqrt{13} \\
&\boxed{= 169\sqrt{13}}
\end{aligned}$$

j) $(i-1)(i-3)(i-5)$

On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{|(i-1)(i-3)(i-5)|} &= |i-1||i-3||i-5| \\
&= \sqrt{(-1)^2+1^2} \times \sqrt{(-3)^2+1^2} \times \sqrt{(-5)^2+1^2} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{10}\sqrt{26} \\
&= \sqrt{2 \times 10 \times 26} \\
&= \sqrt{2^2 \times 5 \times 26} \\
&\boxed{= 2\sqrt{130}}
\end{aligned}$$

k) $\dfrac{7}{(2-i)^2}$

On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\left|\frac{7}{(2-i)^2}\right|} &= \frac{|7|}{|2-i|^2} \\
&= \frac{7}{(\sqrt{5})^2} \\
&\boxed{= \tfrac{7}{5}}
\end{aligned}$$

1) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$

On a,

$$\boxed{\left|\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}\right|} = \left|\frac{1-i+1+i}{(1+i)(1-i)}\right|$$
$$= \left|\frac{2}{2}\right|$$
$$\boxed{=1}$$

Exercice 13 – Lien conjugué/module pour un nombre complexe de module 1. Soient a et b deux nombres complexes de *module 1* : $|a| = 1$ et $|b| = 1$ avec $a \neq b$. Montrer que

$$Z = \frac{a+b}{a-b} \in i\mathbb{R}$$

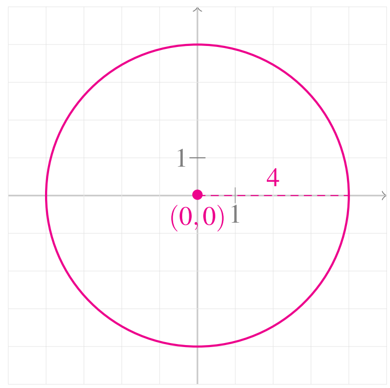
On a,

$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= \overline{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)} \\
&= \frac{\overline{a}+\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}} \\
&= \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} \\
&= \frac{b+a}{b-a} \\
&= -\frac{a+b}{a-b} \\
&= -Z
\end{aligned}$$

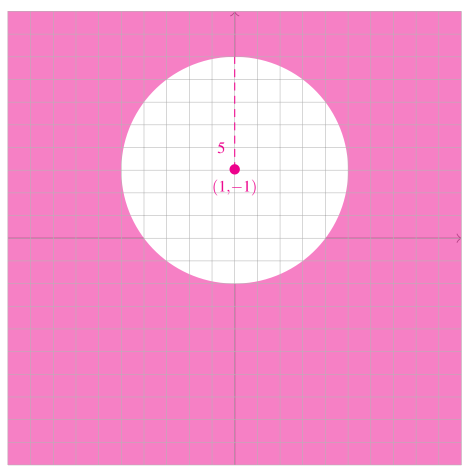
D'où $\boxed{Z \in i\mathbb{R}.}$

Exercice 14 – Représentation géométrique. Représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie

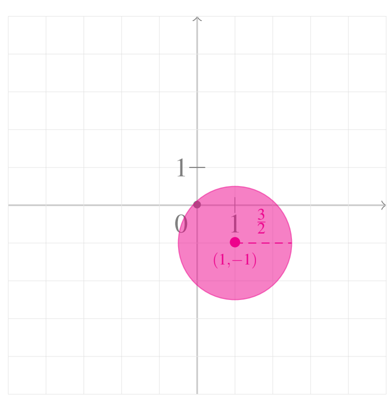
a) $|z| = 4$



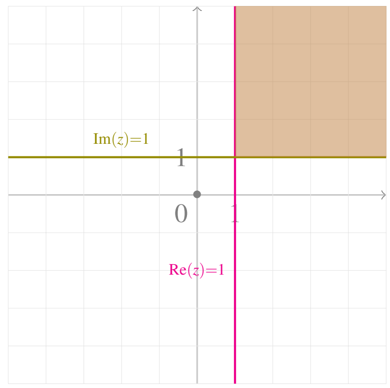
b) $|z-3i| \geq 5$



c) $|z-1+i| \leq \dfrac{3}{2}$



d) $\mathrm{Re}(z) \geq 1$ et $\mathrm{Im}(z) \geq 1$



Exercice 15 – Utilisation de l'inégalité triangulaire. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que

$$|1+a|+|a+b|+|b| \geq 1.$$

Soient a et b deux nombres complexes. En utilisant deux fois **l'inégalité triangulaire**, on obtient rapidement le résultat:

$$\begin{aligned} 1 = |1| &= |1+a-a-b+b| \\ &\leq |1+a| + |-a-b+b| \\ &\leq |1+a| + |-a-b| + |b| \\ &= |1+a| + |a+b| + |b|. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{|1+a|+|a+b|+|b| \geq 1.}$$

2 Équations algébriques

Exercice 16 – Racines carrées complexes. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants.

a) 9

On remarque directement que $9 = 3^2$. Donc le nombre complexe 9 admet deux racines carrées complexes données par $\boxed{-3 \text{ et } 3.}$

b) -17

On remarque directement que $9 = (i\sqrt{17})^2$. Donc le nombre complexe -17 admet deux racines carrées complexes données par $\boxed{i\sqrt{17} \text{ et } -i\sqrt{17}.}$

c) $3+4i$

Soit $\omega = x+iy \in \mathbb{C}$. On a,

$$\begin{aligned}
\omega^2 = 3+4i &\iff \begin{cases} \omega^2 = 3+4i \\ |\omega|^2 = |3+4i| \quad \text{(ajout artificiel mais essentiel)} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = 3+4i \\ x^2+y^2 = \sqrt{9+16} = 5 \end{cases} \qquad \text{(On passe aux calculs avec l'expression } \omega = x+iy\text{)} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2+y^2 = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases} \qquad \text{(On identifie parties réelle et imaginaire pour avoir 3 lignes dans le système)} \\
&\iff \begin{cases} 2x^2 = 8 & (L_1+L_2) \\ 2y^2 = 2 & (L_2-L_1) \\ xy > 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc $\omega = 2+i$ ou $\omega = -2-i$. Donc, les racines carrées de $3+4i$ sont donc $\boxed{2+i \text{ et } -2-i.}$

d) $7+24i$

Soit $\omega = x+iy \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}
\omega^2 = 7+24i &\iff \begin{cases} \omega^2 = 7+24i \\ |\omega|^2 = |7+24i| \quad \text{ajout artificiel mais essentiel} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = 7+24i \\ x^2+y^2 = \sqrt{7^2+24^2} = 25 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2-y^2 = 7 \\ x^2+y^2 = 25 \\ 2xy = 24 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x^2 = 32 \quad (L_1+L_2) \\ 2y^2 = 18 \quad (L_2-L_1) \\ xy > 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 9 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 4 \text{ ou } x = -4 \\ y = 3 \text{ ou } y = -3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc $\omega = 4+3i$ ou $\omega = -4-3i$. Les racines carrées de $7+24i$ sont donc $\boxed{4+3i \text{ et } -4-3i.}$

Exercice 17 – Introduction à la factorisation de polynôme. Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) $2x^2+7x+6=(x+2)(ax+b)$ $\boxed{a=2 \text{ et } b=3}$

b) $-4x^2+4x-1=(2x-1)(ax+b)$ $\boxed{a=-2 \text{ et } b=1}$

c) $-3x^2+14x-15=(x-3)(ax+b)$ $\boxed{a=-3 \text{ et } b=5}$

d) $\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{2}x-40=(x-5)(ax+b)$ $\boxed{a=\frac{1}{2} \text{ et } b=8}$

Exercice 18 – Factorisation de polynôme. Sans calcul de discriminant, factoriser les polynômes suivants et en déduire les racines.

a) $x \mapsto 3x^2 - 14x + 8$ sachant que 4 est racine

Comme 4 est une racine du polynôme $x \mapsto 3x^2 - 14x + 8$, on sait qu'il existe un autre polynôme Q tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 3x^2 - 14x + 8 = (x-4)Q(x)$$

On peut remarquer que nécessairement Q est un polynôme de degré 1 (afin que le produit par $x \mapsto x - 4$ fasse un polynôme de degré deux). Ainsi, le polynôme Q est de la forme $x \mapsto ax + b$ avec a et b deux réels à déterminer. Ainsi, on cherche a et b deux réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 3x^2 - 14x + 8 = (x-4)(ax+b)$$

En identifiant les termes de plus haut degré (c'est-à-dire de degré 2), on trouve que $a = 3$. Et en identifiant les coefficients constants, on trouve que $b = -2$. Ainsi, on obtient la factorisation suivante

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ 3x^2 - 14x + 8 = (x-4)(3x-2)}$$

On peut alors en déduire toutes les racines du polynôme. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 3x^2 - 14x + 8 = 0 &\iff (x-4)(3x-2) = 0 \\ &\iff x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 2 = 0 \\ &\iff x = 4 \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Donc le polynôme possède deux racines réelles : $\boxed{4 \text{ et } \frac{2}{3}.}$

b) $x \mapsto 7x^2 + 23x + 6$ sachant que -3 est racine

En utilisant la même méthode qu'à la question a), on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ 7x^2 + 23x + 6 = (x+3)(7x+2)}$$

Donc le polynôme possède deux racines réelles : $\boxed{-3 \text{ et } -\frac{2}{7}.}$

c) $x \mapsto mx^2 + (2m+1)x + 2$ sachant que -2 est racine (avec $m \in \mathbb{R}^*$)

Soit $m \in \mathbb{R}$. En utilisant la même méthode qu'à la question a), on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ mx^2 + (2m+1)x + 2 = (x+2)(mx+1)}$$

Donc le polynôme possède deux racines réelles : $\boxed{-2 \text{ et } -\frac{1}{m}.}$

d) $x \mapsto x^2 - 4x - 12$ en trouvant une racine évidente

On remarque que -2 est une racine évidente. Donc, en utilisant la même méthode qu'à la question a), on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2 - 4x - 12 = (x+2)(x-6)}$$

Donc le polynôme possède deux racines réelles : $\boxed{-2 \text{ et } 6.}$

e) $x \mapsto 3x^2 + 4x + 1$ en trouvant une racine évidente

On remarque que -1 est une racine évidente. Donc, en utilisant la même méthode qu'à la question a), on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ 3x^2 + 4x + 1 = (x+1)(3x+1)}$$

Donc le polynôme possède deux racines réelles : $\boxed{-1 \text{ et } -\frac{1}{3}.}$

f) $z \mapsto z^2 - 2iz - 1 + 2i$ en trouvant une racine évidente

On remarque que 1 est une racine évidente. Donc, en utilisant la même méthode qu'à la question a), on obtient

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \ z^2 - 2iz - 1 + 2i = (z-1)(z+1-2i)}$$

Donc le polynôme possède deux racines complexes : $\boxed{1 \text{ et } -1+2i.}$

Exercice 19 – Équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $z^2+z+5=0$

C'est une équation de **second degré**. On commence donc par calculer son discriminant. Le discriminant vaut $\Delta=-19=(i\sqrt{19})^2\neq 0$. L'équation admet deux solutions complexes données par

$$\boxed{z_1=\frac{-1-i\sqrt{19}}{2} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-1+i\sqrt{19}}{2}}$$

b) $z^2-\sqrt{3}z-i=0$

C'est une équation de **second degré**. On commence donc par calculer son discriminant. Le discriminant vaut $\Delta=3+4i=(2+i)^2\neq 0$ (en utilisant le résultat de la Question c) de l'Exercice 16). L'équation admet deux solutions complexes données par

$$\boxed{z_1=\frac{\sqrt{3}+2+i}{2} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{\sqrt{3}-2-i}{2}}$$

c) $2z^2-7z+3=0$

C'est une équation de **second degré**. On commence donc par calculer son discriminant. Le discriminant vaut $\Delta=25=5^2\neq 0$. L'équation admet deux solutions réelles données par

$$\boxed{z_1=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{7+5}{4}=3}$$

d) $z^2-(6+i)z+11+13i=0$

C'est une équation de **second degré**. On commence donc par calculer son discriminant. Le discriminant vaut $\Delta=-9-40i\neq 0$. Pour obtenir l'expression des solutions, il nous faut une racine carrée de δ que l'on calcule grâce à la méthode usuelle.

On cherche donc à résoudre l'équation $\delta^2=\Delta=-9-40i$, d'inconnue $\delta\in\mathbb{C}$. Posons $\delta=x+iy\in\mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}
\delta^2=-9-40i &\iff \begin{cases}\omega^2=-9-40i\\ |\omega|^2=|-9-40i|\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x^2-y^2+2xyi=-9-40i\\ x^2+y^2=\sqrt{9^2+40^2}=\sqrt{1681}=41\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x^2-y^2=-9\\ x^2+y^2=41\\ 2xy=-40\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}2x^2=32 \quad (L_1+L_2)\\ 2y^2=50 \quad (L_2-L_1)\\ xy<0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x^2=16\\ y^2=50\\ x \text{ et } y \text{ de signes différents}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x=4 \text{ ou } x=-4\\ y=5 \text{ ou } y=-5\\ x \text{ et } y \text{ de signes différents}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x=4\\ y=-5\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=-4\\ y=5\end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc $\delta=4-5i$ ou $\delta=-4+5i$.

Ainsi, $\Delta=-9-40i=(4-5i)^2\neq 0$. L'équation admet deux solutions complexes données par

$$\boxed{z_1=\frac{6+i+4-5i}{2}=1+3i}$$

$$\text{et} \quad \boxed{z_2=\frac{6+i-4+5i}{2}=5-2i}$$

e) $4z^2-z+4=0$

C'est une équation de **second degré**. On commence donc par calculer son discriminant. Le discriminant vaut $\Delta=-63=(3i\sqrt{7})^2\neq 0$. L'équation admet deux solutions complexes données par

$$\boxed{z_1=\frac{1-3i\sqrt{7}}{8} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{1+3i\sqrt{7}}{8}}$$

f) $iz^2 + (-3+4i)z - 5 + i = 0$

C'est une équation de **second degré**. On commence donc par calculer son discriminant. Le discriminant vaut $\Delta = -3-4i = (-1+2i)^2 \neq 0$ (on trouve une racine carrée de Δ en utilisant la méthode habituelle ou en remarquant que

$$\Delta = -(3+4i) = i^2(3+4i) = i^2(2+i)^2 = [i(2+i)]^2 = (-1+2i)^2$$

où on a encore utilisé le résultat de la Question c) de l'Exercice 16). L'équation admet deux solutions complexes données par

$$\boxed{z_1 = -1-i \quad \text{et} \quad z_2 = -3-2i}$$

Exercice 20 – Relations coefficients-racines. Trouver *sans calculs* les solutions des équations de degré deux suivantes.

a) $x^2+8x+15=0$

Notons x_1 et x_2 les racines du polynôme $x \mapsto x^2+8x+15$. Grâce aux relations coefficients-racines, on sait que,

$$x_1 \times x_2 = 15 \qquad \text{et} \qquad x_1+x_2=-8$$

Ainsi, en résolvant de tête, on obtient que les deux racines du polynôme $x \mapsto x^2+8x+15$ (ou autrement dit, les deux solutions de l'équation $x^2+8x+15=0$) sont

$$\boxed{x_1=-3 \qquad \text{et} \qquad x_2=-5}$$

b) $x^2+18x+77=0$

En utilisant le même raisonnement, on obtient que l'équation $x^2+18x+77=0$ admet deux solutions données par

$$\boxed{-7 \qquad \text{et} \qquad -11}$$

c) $x^2-8x-33=0$

En utilisant le même raisonnement, on obtient que l'équation $x^2-8x-33=0$ admet deux solutions données par

$$\boxed{-3 \qquad \text{et} \qquad 11}$$

3 Appronfondissement

Exercice 21 – Factorisation de polynôme. Factoriser les polynômes suivants :

a) $x \mapsto x^3 - x^2 - 2x + 8$

On peut remarquer que -2 est une racine évidente. Ainsi, il existe a, b, c trois réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^3 - x^2 - 2x + 8 = (x+2)(ax^2 + bx + c)$$

En regardant le coefficient dominant et le coefficient constant, on trouve directement que $a = 1$ et $c = 4$. De plus, à droite, en développant, on remarque que le coefficient «devant le x^2» va être $b + 2$. Ainsi, on doit prendre $b = -3$ pour que cela coïncide avec le polynôme de gauche. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^3 - x^2 - 2x + 8 = (x+2)(x^2 - 3x + 4)$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 2x + 8 = 0 &\iff (x+2)(x^2 - 3x + 4) = 0 \\ &\iff x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x + 4 = 0 \\ &\iff x = -2 \quad \text{ou} \quad x^2 - 3x + 4 = 0 \end{aligned}$$

L'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$ est une équation du second degré. Comme son discriminant vaut $\Delta = -7 < 0$, elle n'admet pas de racines réelles, mais admet deux racines complexes données par

$$z_1 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}$$

En résumé, l'équation $x^3 - x^2 - 2x + 8 = 0$ admet une unique solution réelle, donnée par -2, et dans $\mathbb{R}$, le polynôme se factorise sous la forme

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^3 - x^2 - 2x + 8 = (x+2)(x^2 - 3x + 4)}$$

mais admet trois solutions complexes, données par

$$-2 \qquad \text{et} \qquad \frac{3 - i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}$$

et donc dans $\mathbb{C}$, le polynôme se factorise sous la forme

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{C}, \qquad x^3 - x^2 - 2x + 8 = (x+2)\left(x - \tfrac{3 - i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \tfrac{3 + i\sqrt{7}}{2}\right)}$$

b) $x \mapsto x^3 + 5x^2 - 12x + 6$

De même, on montre que,

$$\begin{aligned} \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^3 + 5x^2 - 12x + 6} &= (x-1)(x^2 + 6x - 6) \\ &\boxed{= (x-1)(x + 3 - \sqrt{15})(x + 3 + \sqrt{15})} \end{aligned}$$

en ayant calculer le discriminant et les racines du polynôme de second degré $x \mapsto x^2 + 6x - 6$.

Exercice 22 – Équation de degré trois. On considère l'équation (E) suivante :

$$z^3+(1+i)z^2+(4-i)z+12-6i=0$$

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle.

   Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (E) &\iff x^3+(1+i)x^2+(4-i)x+12-6i=0 \\ &\iff x^3+x^2-4x+12+i(x^2-x-6)=0 \\ &\iff \begin{cases} x^3+x^2-4x+12=0 \\ x^2-x-6=0 \end{cases}. \end{aligned}$$

   Or (grâce au discriminant ou aux relations coefficients-racines), on obtient que

$$x^2-x-6=0 \qquad \iff \qquad x=3 \quad \text{ou} \quad x=-2$$

   Mais,

$$3^3+3^2-4\times 3+12=60\neq 0 \quad \text{et} \quad (-2)^3+(-2)^2-4\times(-2)+12=0$$

   Donc x est solution de (E) si et seulement si $x=-2$. L'équation (E) admet donc une unique solution réelle qui vaut $\boxed{-2.}$

2. En déduire toutes les solutions de (E).

   Comme -2 est une solution de (E) d'après la question précédente, il existe a,b,c trois nombres complexes tels que (factorisation dans $\mathbb{C}$):

$$\forall z\in\mathbb{C}, \qquad z^3+(1+i)z^2+(4-i)z+12-6i=(z+2)(az^2+bz+c).$$

   En identifiant les coefficients dominants, on trouve que $a=1$; en identifiant les coefficients constants, on trouve que $c=6-3i$; et enfin, en regardant les termes «devant z^2», on trouve que $b=-1+i$. Ainsi,

$$\forall z\in\mathbb{C}, \qquad z^3+(1+i)z^2+(4-i)z+12-6i=(z+2)(z^2+(-1+i)z+6-3i).$$

   Ainsi, pour tout $z\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z^3+(1+i)z^2+(4-i)z+12-6i=0 &\iff (z+2)(z^2+(-1+i)z+6-3i)=0 \\ &\iff z=-2 \quad \text{ou} \quad z^2+(-1+i)z+6-3i=0 \end{aligned}$$

   Or, l'équation $z^2+(-1+i)z+6-3i=0$ est une équation du second degré. On commence donc par calculer son discriminant, qui vaut $\Delta=-24+10i=(1+5i)^2\neq 0$ (une racine carrée est déterminée grâce à la méthode usuelle qui n'est pas détaillée ici). Ainsi, l'équation du second degré $z^2+(-1+i)z+6-3i=0$ admet deux racines complexes, données par,

$$z_1=-3i \qquad \text{et} \qquad z_2=1+2i$$

   Finalement,

$$z^3+(1+i)z^2+(4-i)z+12-6i=0 \iff z=-2 \quad \text{ou} \quad z=-3i \quad \text{ou} \quad z=1+2i$$

   L'équation (E) admet trois solutions complexes qui sont $\boxed{-2,\ -3i \text{ et } 1+2i.}$

Exercice 23 – Déterminer puis représenter l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que

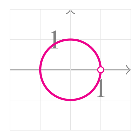
$$\frac{z+1}{z-1} \text{ soit imaginaire pur}$$

- **Méthode 1 : grâce à la caractérisation avec le conjugué.** Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$ (pour que la quantité étudiée ait un sens). On a,

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} &\iff \overline{\frac{z+1}{z-1}} = -\frac{z+1}{z-1} \\
&\iff \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = -\frac{z+1}{z-1} \\
&\iff (\overline{z}+1) \times (z-1) = -(z+1)(\overline{z}-1) \\
&\iff \overline{z}z - \overline{z} + z - 1 = -(z\overline{z} - z + \overline{z} - 1) \\
&\iff \overline{z}z - \cancel{\overline{z}} + \cancel{z} - 1 = -z\overline{z} + \cancel{z} - \cancel{\overline{z}} + 1 \\
&\iff 2\overline{z}z = 2 \\
&\iff \overline{z}z = 1 \\
&\iff |z|^2 = 1 \\
&\iff |z| = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$ est donné par

$$\boxed{\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \backslash \{1\}}$$



- **Méthode 2 : en calculant la partie réelle.** Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 1$. On a,

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} &= \frac{a+ib+1}{a+ib-1} \\
&= \frac{a+1+ib}{a-1+ib} \\
&= \frac{(a+1+ib)(a-1-ib)}{(a-1+ib)(a-1-ib)} \\
&= \frac{a^2+b^2-1-2ib}{(a-1)^2+b^2} \\
&= \frac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2} + i\frac{-2b}{(a-1)^2+b^2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} &\iff \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \\
&\iff \frac{a^2+b^2-1}{(a-1)^2+b^2} = 0 \\
&\iff a^2+b^2-1 = 0 \\
&\iff a^2+b^2 = 1 \\
&\iff |z|^2 = 1 \\
&\iff |z| = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$ est donné par

$$\boxed{\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \backslash \{1\}}$$

Exercice 24 –

1. Soient z et z' deux nombres complexes tels que $1+zz\neq 0$, $|z|=1$ et $|z'|=1$. Montrer que
$$\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}$$
Posons $Z=\dfrac{z+z'}{1+zz'}$. On a
$$\overline{Z}=\overline{\frac{z+z'}{1+zz'}}=\frac{\bar z+\bar z'}{1+\bar z\bar z'}$$
Or $|z|=1$, donc $|z|^2=z\bar z=1$, et donc $\bar z=\dfrac{1}{z}$. De même, $\bar z'=\dfrac{1}{z'}$. On a donc
$$\overline{Z}=\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{zz'}}=\frac{\frac{zz'}{z}+\frac{zz'}{z'}}{zz'+\frac{zz'}{zz'}}=\frac{z'+z}{zz'+1}=Z$$
Donc $\boxed{Z\in\mathbb{R}.}$

2. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|=1$ et $z\neq 1$. Montrer que
$$i\frac{z+1}{z-1}\in\mathbb{R}$$
Posons $Z=i\dfrac{z+1}{z-1}$. On a
$$\overline{Z}=-i\frac{\bar z+1}{\bar z-1}$$
Or, comme $|z|=1$, $\bar z z=1$, donc $\bar z=\dfrac{1}{z}$. Donc
$$\overline{Z}=-i\frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}=-i\frac{1+z}{1-z}=i\frac{z+1}{z-1}=Z$$
Donc $\boxed{Z\in\mathbb{R}.}$

Exercice 25 – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + z^2 - 6 = 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $Z = z^2$. Alors,

z est solution de $z^4 + z^2 - 6 = 0$ si et seulement si Z est solution de $Z^2 + Z - 6 = 0$.

Or

$$Z^2 + Z - 6 = (Z-2)(Z+3)$$

On en déduit que

Z est solution de $Z^2 + Z - 6 = 0$ si et seulement si $Z = -3$ ou $Z = 2$.

Donc,

$$\begin{aligned} \boxed{z \text{ est solution de } z^4 + z^2 - 6 = 0} &\iff z^2 = -3 \quad \text{ou} \quad z^2 = 2 \\ &\iff \boxed{z = i\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad z = -i\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Exercice 26 – Soient $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| = 1$. Montrer que $|x-u| = |1-xu|$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| = 1$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{|x-u|} &= |u(\frac{1}{u}x - 1)| \quad \text{car } u \neq 0 \\
&= |u||x\overline{u} - 1| \quad \text{car } u\overline{u} = 1 \\
&= |\overline{x\overline{u} - 1}| \quad \text{car } |z| = |\overline{z}| \\
&= |\overline{x}u - 1| \\
&= |xu - 1| \quad \text{car } x \in \mathbb{R} \\
&\boxed{= |1-xu|.}
\end{aligned}$$

Exercice 27 –

1. Montrer l'identité du parallélogramme: pour tout $u, v \in \mathbb{C}$,

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

Soit $u, v \in \mathbb{C}$. On a

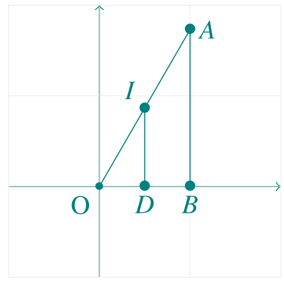
$$\begin{aligned}
\boxed{|u+v|^2 + |u-v|^2} &= (u+v)\overline{(u+v)} + (u-v)\overline{(u-v)} \\
&= (u+v)(\bar{u}+\bar{v}) + (u-v)(\bar{u}-\bar{v}) \\
&= u\bar{u} + u\bar{v} + v\bar{u} + v\bar{v} + u\bar{u} - u\bar{v} - v\bar{u} + v\bar{v} \\
&\boxed{= 2|u|^2 + 2|v|^2.}
\end{aligned}$$

2. En donner une interprétation géométrique.

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des quatre côtés.

Exercice 28 – Oral TSI CCINP 2012. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Le point A est le point d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$. On note I le milieu du segment $[OA]$.

1. Déterminer l'affixe du point I.



D'après le **théorème de Thalès**, on a,

$$\frac{OI}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{DI}{DA}$$

c'est-à-dire, si on note $x + iy$ l'affixe de I,

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{1} = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

(on a aussi utilisé que $|OA| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$ et $OI = 1$ car I est le milieu du segment $[OA]$). On obtient donc que,

$$\boxed{\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

est l'affixe de I.

2. Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z| = |z - z_A|$ est une droite passant par I.

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (avec x et y deux réels). On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{|z| = |z - z_A|} &\Leftrightarrow |z|^2 = |z - z_A|^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y - \sqrt{3})^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 \\
&\Leftrightarrow 0 = -2x + 4 - 2\sqrt{3}y \\
&\boxed{\Leftrightarrow y = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}x + \tfrac{2}{\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

La dernière équation décrit bien une droite passant par I car

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\bar{z} + 1 + i\sqrt{3}$$

(a) Calculer $f(0)$, $f(z_A)$ et $f(z_I)$.

On a,

$$\boxed{f(0) = 1 + i\sqrt{3}}$$

et

$$\boxed{f(z_A)} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3} \boxed{= 3}$$

et

$$f(z_I) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 + i\sqrt{3} = 2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(b) Montrer que,

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \ |f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|$$

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{|f(z_1) - f(z_2)|} &= \left| \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\overline{z_1} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\overline{z_2} \right| \\
&= \left| \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right| |\overline{z_1} - \overline{z_2}| \\
&= 1 \times |z_1 - z_2| \\
&\boxed{= |z_1 - z_2|}
\end{aligned}$$