TD 27 – Bases et dimension (Correction)

1 Famille libre

Exercice 1 – Montrer que les familles suivantes sont libres.

a) $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ (dans $\mathbb{R}^3$)

Soient $u_1=(1,0,1)$, $u_2=(1,1,0)$ et $u_3=(0,1,1)$. Montrons que la famille (u_1,u_2,u_3) est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. On a

$$\begin{array}{ll}
 & \lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_{\mathbb{R}^3} \\
\text{donc} & \lambda_1(1,0,1)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(0,1,1)=(0,0,0) \\
\text{donc} & \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
\text{donc} & \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad L_3\leftarrow L_3-L_1 \\
\text{donc} & \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad L_3\leftarrow L_3+L_2 \\
\text{donc} & \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0
\end{array}$$

Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est libre.}}$

b) $((1,1,0),(0,1,1))$ (dans $\mathbb{R}^3$)

Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc $\boxed{\text{la famille } ((1,1,0),(0,1,1)) \text{ est libre.}}$

c) $(X,X(X-1),X(X-1)(X-2)$ (dans $\mathbb{R}[X]$)

Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tels que

$$\lambda_1X+\lambda_2X(X-1)+\lambda_3X(X-1)(X-2)=0$$

En évaluant en 1, on trouve $\lambda_1=0$. Puis en évaluant en 2, on trouve $\lambda_2=0$. Puis $\lambda_3=0$. Donc $\boxed{\text{la famille est libre.}}$

d) $(1, x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto \mathrm{e}^{2x})$ (dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$)

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 \mathrm{e}^x + \lambda_3 \mathrm{e}^{2x} = 0$$

En faisant tendre $[x \to -\infty]$, on trouve $\lambda_1 = 0$. Il nous reste alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_2 \mathrm{e}^x + \lambda_3 \mathrm{e}^{2x} = 0$$

Donc après simplification,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_2 + \lambda_3 \mathrm{e}^x = 0$$

En faisant tendre $[x \to -\infty]$, de nouveau on trouve $\lambda_2 = 0$. Puis $\lambda_3 = 0$. Donc $\boxed{\text{la famille est libre.}}$

e) $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ (dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$)

Exercice 2 – Question ouverte. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

a) $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$

Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3=0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.
On a

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3=0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \lambda_1(0,0,1)+\lambda_2(0,1,1)+\lambda_3(1,1,1)=(0,0,0) \\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{ccccccc} & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\ \text{donc} & \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \end{array}$$

Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est libre.}}$

b) $((1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$

Montrons que la famille (u_1,u_2,u_3,u_4) est liée. On peut remarquer directement que

$$u_1+u_2+u_3=u_4$$

Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2,u_3,u_4) \text{ est liée.}}$

c) (X,X^2-X,X^2+X) dans $\mathbb{R}_2[X]$

$\boxed{\text{Famille liée}}$ car

$$(-\frac{1}{2})(X^2-X)+\frac{1}{2}(X^2+X)=X$$

d) $(\sin,\cos,x\mapsto x\sin(x))$ dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \lambda_1\sin(x)+\lambda_2\cos(x)+\lambda_3 x\sin(x)=0$$

En prenant $x=0$, on trouve $\lambda_2=0$. Puis, en prenant $x=\frac{\pi}{2}$, on trouve

$$\lambda_1+\lambda_3\times\frac{\pi}{2}=0\qquad(1)$$

En prenant $x=\frac{\pi}{4}$, on a

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_1+\lambda_3\times\frac{\pi}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1+\lambda_3\times\frac{\pi}{4}=0\qquad(2)$$

En soustrayant (1) et (2), on trouve que $\lambda_3=0$ puis que $\lambda_1=0$. La $\boxed{\text{famille est libre.}}$

e) $((1)_{n\in\mathbb{N}},(n^2)_{n\in\mathbb{N}},(2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ dans l'espace des suites réelles

Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \lambda_1+\lambda_2 n^2+\lambda_3 2^n=0$$

Alors,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \frac{\lambda_1}{2^n}+\lambda_2\frac{n^2}{2^n}+\lambda_3=0$$

En faisant $[n\to\infty]$, on trouve que $\lambda_3=0$. Il nous reste

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \lambda_1+\lambda_2 n^2=0$$

De même, on a

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \frac{\lambda_1}{n^2}+\lambda_2=0$$

En faisant $[n\to+\infty]$, $\lambda_2=0$. Puis $\lambda_1=0$. La $\boxed{\text{famille est libre.}}$

f) $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&6\\0&3\end{pmatrix}\right)$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

$\boxed{\text{La famille est liée}}$ car

$$\begin{pmatrix}3&6\\0&3\end{pmatrix}=(-3)\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Exercice 3 – Soient $u=(1,1,m)$, $v=(0,1,2)$ et $w=(1,0,3)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel m pour que la famille (u,v,w) soit libre.

Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
a\cdot u+b\cdot v+c\cdot w=0 &\Leftrightarrow a\cdot(1,1,m)+b\cdot(0,1,2)+c\cdot(1,0,3)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow (a+c,a+b,ma+2b+3c)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+ \qquad c=0\\ a+b \qquad =0\\ ma+2b+3c=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} c=-a\\ b=-a\\ (m-5)a=0\end{cases}
\end{aligned}$$

La dernière équation amène deux cas.

- 1^{er} cas : $m=5$ La dernière équation devient $0a=0$, ce qui est toujours vrai, quel que soit le réel a. Donc le système est équivalent à :

  $$\begin{cases} c=-a\\ b=-a\end{cases}$$

  Le triplet $(0,0,0)$ n'est pas la seule solution de ce système donc la famille (u,v,w) n'est pas libre. Autrement dit, dans ce cas, on remarque par exemple que

  $$u-v-w=0$$

  Donc la famille est liée.
- 2° cas : $m\neq 5$ La dernière équation donne $a=0$, puis en remontant le système, on trouve $b=0$ et $c=0$. Donc la famille (u,v,w) est libre.

On conclut que $\boxed{\text{la famille } (u,v,w) \text{ est libre si et seulement si } m\neq 5.}$

Exercice 4 – Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$: $A^p = 0_n$ et $A^{p-1} \neq 0_n$. Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{p-1})$ est libre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{p-1} A^{p-1} = 0_n$$

Montrons que, pour tout $i \in \{0, \dots, p-1\}, \lambda_i = 0$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Notons i_0 le plus petit indice dans $\{0, \dots, p-1\}$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Alors par construction, tout $i \in \{0, \dots, i_0 - 1\}, \lambda_i = 0$. On a donc

$$\lambda_{i_0} A^{i_0} + \dots + \lambda_{p-1} A^{p-1} = 0_n$$

En multipliant par A^{p-1-i_0}, on obtiant

$$\lambda_{i_0} A^{p-1} + \lambda_{i_0+1} A^p + \dots + \lambda_{p-1} A^{2p-2i_0} = q_n.$$

Or pour tout $k \geqslant p, A^p = 0_n$. Donc dans l'égalité, il ne reste que

$$\lambda_{i0} A^{p-1} = 0_n$$

Or, $A^{p-1} \neq 0_n$. Dore $\lambda_{i_0} = 0$, ce qui est absurde. Donc, pour tout $i \in \{0, \dots, p-1\}, \lambda_i = 0$.
$\boxed{\text{La famille } (I_n, A, \dots, A^{p-1}) \text{ est donc libre.}}$

Exercice 5 – Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille libre d'un espace vectoriel E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

a) (e_1, e_4)

La famille (e_1, e_4) est une sous-famille de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) qui est libre, elle est donc $\boxed{\text{libre.}}$ *On peut aussi dire que les deux vecteurs e_1 et e_4 ne sont pas colinéaires sinon la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) ne serait pas libre.*

b) (e_1)

La famille (e_1) est une sous-famille de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) qui est libre, elle est donc $\boxed{\text{libre.}}$ *On peut aussi dire que le vecteur e_1 est pas nul sinon la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) ne serait pas libre.*

c) $(e_2 + e_3, e_3, e_4, -e_2 + 2e_3)$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que

$$\lambda_1(e_2 + e_3) + \lambda_2 e_3 + \lambda_3 e_4 + \lambda_4(-e_2 + 2e_3) = 0$$

On a alors, en regroupant selon chaque vecteur :

$$2\lambda_1 e_1 + (-\lambda_1 + \lambda_2)\, e_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)\, e_3 + \lambda_4 e_4 = 0$$

Puisque la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre, on déduit (par identification des coefficients) :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \text{et donc } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Cela prouve que $\boxed{\text{la famille (} 2e_1 - e_2, e_2 + e_3, e_3 - e_4, e_4 \text{) est libre.}}$

d) $(2e_1 - e_2, e_2 + e_3, e_3 - e_4, e_4)$

On peut procéder comme ci-dessus et aboutir à un système, mais on peut aussi repérer que

$$(e_2 + e_3) + (-e_2 + 2e_3) = e_3$$

c'est-à-dire qu'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres. Cela prouve que $\boxed{\text{la famille n'est pas libre.}}$

2 Bases

Exercice 6 – En montrant une décomposition unique.

1. Montrer que $((1,2),(-1,3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ puis déterminer les coordonnées de $(-1,3)$ dans cette base.

Soient $u_1 = (1,2)$ et $u_2 = (-1,3)$. Montrons que la famille (u_1,u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

① Tous les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent à $\mathbb{R}^2$.

② Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = au_1 + bu_2$. Pour cela, résolvons le système associé. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} u = au_1 + bu_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} a & - & b & = & x \\ 2a & + & 3b & = & y \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} a & - & b & = & x \\ & & 5b & = & y-2x \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \frac{3x}{5} + \frac{y}{5} \\ b & = & -\frac{2x}{5} + \frac{y}{5} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc, le système admet une unique solution, c'est-à-dire qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = au_1 + bu_2$.

Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$

Puis, en reprenant les calculs précédents (la décomposition démontrée), on obtient que $\boxed{\text{les coordonnées de } (-1,3) \text{ dans cette base sont : } (0,1)}$

2. Montrer que $((1,0,1),(2,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer les coordonnées de $(1,-2,3)$ dans cette base.

Soient $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (2,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$. Montrons que la famille (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

① Tous les vecteurs u_1,u_2,u_3 appartiennent à $\mathbb{R}^3$.

② Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = au_1 + bu_2 + cu_3$. Pour cela, résolvons le système associé. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} u = au_1 + bu_2 + cu_3 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & c & = & x \\ & & b & + & c & = & y \\ a & & & + & c & = & z \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & c & = & x \\ & & b & + & c & = & y \\ & - & 2b & & & = & z-x \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \frac{x}{2} - y + \frac{z}{2} \\ c & = & -\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} \\ b & = & \frac{x}{2} - \frac{z}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc, le système admet une unique solution, c'est-à-dire qu'il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = au_1 + bu_2 + cu_3$.

Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2,u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

Puis $\boxed{\text{les coordonnées de } (1,-2,3) \text{ dans cette base sont : } (4,-1,-1)}$

Exercice 7 – Par extraction.

a) On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1=(1,2,0)$, $u_2=(0,0,3)$, $u_3=(1,2,3)$ et $u_4=(-2,-4,1)$. Déterminer une base de $F=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Trouvons une base du sous-espace vectoriel $F=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

- Par construction, la famille (u_1,u_2,u_3,u_4) engendre F. Cependant, ce n'est pas une famille libre (et donc pas une base) car, on peut remarquer par exemple que

$$u_3=u_1+u_2 \qquad \text{et} \qquad u_4=-2u_1+\frac{1}{3}u_2.$$

Si on ne le voit pas directement, on peut chercher quatre réels a, b, c, d non tous nuls tels que $au_1+bu_2+cu_3+du_4=0_{\mathbb{R}^3}$ en résolvant le système associé. Ceci montre également que

$$F=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$$

et donc que la famille (u_1,u_2) engendre également F.

- Montrons que la famille (u_1,u_2) est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1=\lambda_2=0$. On a

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1u_1+\lambda_2u_2=0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 \qquad & = & 0 \\ 2\lambda_1 \qquad & = & 0 \\ 3\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\ \text{donc} & \lambda_1=\lambda_2=0 \end{array}$$

Donc, la famille (u_1,u_2) est une famille libre.

Finalement, $\boxed{\text{la famille } (u_1,u_2) \text{ est une base de } F.}$

b) Montrer que la famille

$$((1,0,1),(1,1,1),(1,2,3),(3,2,1),(1,-1,1))$$

est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. En extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

- **Première méthode.** On peut montrer que la famille $\boxed{((1,0,1),(1,1,1),(1,2,3))}$ est libre (en revenant à la définition - le système). De plus, elle contient autant d'élément que la dimension de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}^3.}$ En particulier, elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$. En tant que sur-famille, la famille $((1,0,1),(1,1,1),(1,2,3),(3,2,1),(1,-1,1))$ est aussi génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- **Deuxième méthode.** On pourrait montrer par «opérations sur le Vect» que

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,1),(1,2,3),(3,2,1),(1,-1,1)) &= \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \\ &= \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

Ce qui répond aux deux questions.

Exercice 8 – En écrivant les ensembles comme un Vect puis extraction. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en déterminer une base.

a) $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$

Montrons que $G_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminons-en une base.

- **Première étape :** On détermine une famille génératrice de G_1 en écrivant l'espace «comme un Vect». L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$u \in G_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x - 2y = 0$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue - par exemple x - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici y et z.

$$u \in G_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2y$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in G_1 \quad &\Leftrightarrow \quad u = (2y, y, z) \\ &\Leftrightarrow \quad u = y(2,1,0) + z(0,0,1) \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect}((2,1,0),(0,0,1)) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{G_1 = \mathrm{Vect}((2,1,0),(0,0,1))}$$

Donc, la famille

$$(u_1, u_2) = ((2,1,0),(0,0,1))$$

est génératrice de G_1.

- **Deuxième étape :** On extrait une famille libre de la famille génératrice. Montrons que la famille (u_1, u_2) est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda_1 \quad & = & 0 \\ \lambda_1 \quad & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{array}$$

Donc, la famille (u_1, u_2) est une famille libre.

- Finalement, $\boxed{\text{la famille } ((2,1,0),(0,0,1)) \text{ est une base de } G_1.}$

b) $F_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0, x+2y+3z+4t=0\}$

Montrons que $G_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-t=0, x+2y+3z+4t=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminons-en une base.

- **Première étape :** On détermine une famille génératrice de G_2. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec quatre inconnues et deux équations. Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in G_2 \quad \Leftrightarrow \quad (S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 0 \end{array}\right.$$

  On a deux équations pour quatre inconnues : on choisit deux inconnues - par exemple x et y - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici z et t à l'aide du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}(S) \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & + & 5t & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -\frac{5}{3}z - \frac{2}{3}t \\ y & = & -\frac{2}{3}z - \frac{5}{3}t \end{array}\right.\end{aligned}$$

  Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in G_2 \quad &\Leftrightarrow \quad u = \left(-\tfrac{5}{3}z - \tfrac{2}{3}t, -\tfrac{2}{3}z - \tfrac{5}{3}t, z, t\right) \\ &\Leftrightarrow \quad u = z\left(-\tfrac{5}{3}, -\tfrac{2}{3}, 1, 0\right) + t\left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{5}{3}, 0, 1\right) \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect}\left(\left(-\tfrac{5}{3}, -\tfrac{2}{3}, 1, 0\right), \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{5}{3}, 0, 1\right)\right) \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect}((-5,-2,3,0),(-2,-5,0,3)) \end{aligned}$$

  Donc

$$\boxed{G_2 = \mathrm{Vect}((-5,-2,3,0),(-2,-5,0,3))}$$

  Donc, la famille

$$(u_1, u_2) = ((-5,-2,3,0),(-2,-5,0,3))$$

  est génératrice de G_2.

- **Deuxième étape :** On extrait une famille libre de la famille génératrice. Montrons que la famille (u_1, u_2) est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^4} \\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{ccccc} -5\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & - & 5\lambda_2 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & & & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{array}$$

  Donc, la famille (u_1, u_2) est une famille libre.

- Finalement, $\boxed{\text{la famille } ((-5,-2,3,0),(-2,-5,0,3)) \text{ est une base de } G_2.}$

c) $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors,

$$\begin{aligned} P \in F_3 &\iff P(1) = 0 \\ &\iff a+b+c+d = 0 \\ &\iff d = -a-b-c \\ &\iff P = aX^3 + bX^2 + cX - a - b - c \\ &\iff P = a(X^3-1) + b(X^2-1) + c(X-1) \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{F_3 = \mathrm{Vect}((X^3-1, X^2-1, X-1))}$$

Puis la $\boxed{\text{famille } ((X^3-1, X^2-1, X-1))}$ est génératrice de F_3 et est libre (car degrés échelonnés) donc c'est une $\boxed{\text{base de } F_3.}$

d) $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0\}$

On peut montrer que

$$\boxed{F_5} = \{aX^2 + bX + c \mid \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0\} = \mathrm{Vect}(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2}) \boxed{= \mathrm{Vect}(3X^2-1, 2X-1)}$$

puis que $\boxed{(3X^2-1, 2X-1) \text{ est une base de } F_5.}$

e) $F_6 = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' = 0\}$

On peut montrer que

$$\boxed{F_6 = \{x \mapsto ax+b \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(x \mapsto x, x \mapsto 1)}$$

puis que $\boxed{\text{la famille } (x \mapsto x, x \mapsto 1) \text{ est une base de } F_6.}$

Exercice 9 – Théorème de la base incomplète.

1. Justifier que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1 = (1,1,1,1)$ et $\vec{e}_2 = (1,1,-1,-1)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

   Les deux vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ne sont pas colinéaires donc la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre. Pour la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$, il nous manque deux vecteurs qu'on peut aller piocher dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Il faut juste prendre des vecteurs qui ne sont pas combinaison linéaire les uns des autres.

   - Attention, par exemple la famille complétée en
   $$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, (0,0,1,0), (0,0,0,1))$$
   n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$ car
   $$\vec{e}_1 = \vec{e}_2 + 2(0,0,1,0) + 2(0,0,0,1)$$
   - Par contre, on peut montrer que la famille
   $$\boxed{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, (1,0,0,0), (0,0,0,1))}$$
   est libre (en repassant par la définition, le système) et elle contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}^4$: c'est donc une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}^4.}$

2. Montrer que la famille (X^2+1, X^2+X) est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

   On peut montrer que $\boxed{\text{la famille } (X^2+1, X^2+X, 1, X^3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X].}$

3 Dimension

Exercice 10 – Dimension d'un Vect. Dans chaque cas, déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

a) $\boxed{\dim(\mathrm{Vect}((1,1))) = 1}$

b) $\boxed{\dim(\mathrm{Vect}((1,1),(-1,-1))) = 1}$ car $(-1,-1) = (-1)\cdot(1,1)$

c) $\boxed{\dim(\mathrm{Vect}(((1,2),(-1,2))) = 2}$

d) $\boxed{\dim(\mathrm{Vect}((0,0))) = 0}$

e) $\boxed{\dim(\mathrm{Vect}(((1,0,1),(0,1,0),(2,2,2))) = 2}$ car $(2,2,2) = 2\cdot(1,0,1) + 2(0,1,0)$

f) $\boxed{\dim(\mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))) = 3}$

Exercice 11 – Dimension d'un ensemble définie de manière conditionnelle. Dans chaque cas, déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

a) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\right\}$

On reprend la méthode de l'Exercice 8.

- **Première étape : Écrire l'ensemble «comme un Vect».** On peut montrer que

$$F = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$$

- **Deuxième étape : Extraire une base.** La famille $((1,1,0),(1,0,1))$ est génératrice de F et libre (vecteurs non colinéaires), c'est une base de F.
- **Troisième étape : Déduire la dimension.** On en déduit que $\boxed{\dim(F) = 2.}$

b) $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = 0 \text{ et } z + t = 0\right\}$

On reprend la méthode de l'Exercice 8.

- **Première étape : Écrire l'ensemble «comme un Vect».** On peut montrer que

$$F = \mathrm{Vect}((-1,1,-1,1))$$

- **Deuxième étape : Extraire une base.** La famille $((-1,1,-1,1))$ est génératrice de F et libre (vecteur non nul), c'est une base de F.
- **Troisième étape : Déduire la dimension.** On en déduit que $\boxed{\dim(F) = 1.}$

c) $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$

On reprend la méthode de l'Exercice 8.

- **Première étape : Écrire l'ensemble «comme un Vect».** On peut montrer que

$$F = \mathrm{Vect}(X^3 - 3X^2 + 3X - 1)$$

- **Deuxième étape : Extraire une base.** La famille $(X^3 - 3X^2 + 3X - 1)$ est génératrice de F et libre (vecteur non nul), c'est une base de F.
- **Troisième étape : Déduire la dimension.** On en déduit que $\boxed{\dim(F) = 1.}$

d) $F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0_2\}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

On reprend la méthode de l'Exercice 8.

- **Première étape : Écrire l'ensemble «comme un Vect».** On peut montrer que

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$

- **Deuxième étape : Extraire une base.** La famille (M_1, M_2) est génératrice de F et libre (vecteurs non colinéaires), c'est une base de F.
- **Troisième étape : Déduire la dimension.** On en déduit que $\boxed{\dim(F) = 2.}$

Exercice 12 – Dimension d'un ensemble définie de paramétrique. Dans chaque cas, déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

a) $F=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1,0))$ $\boxed{\dim(F)=1}$

b) $F=\{(3a-5b,2a,a+b)\mid(a,b)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}((3,2,1),(-5,0,1))$ $\boxed{\dim(F)=2}$

c) On a,

$$F=\{x\mapsto(ax^2+bx+c)\cos(x)|a,b,c\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(x\mapsto\cos(x),x\mapsto x\cos(x),x\mapsto x^2\cos(x))$$

donc $\boxed{\dim(F)=3}$

Exercice 13 – Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((0,1,1),(-1,1,-1))$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   On montre que
   $$F = \mathrm{Vect}((2,1,0),(1,0,1))$$
   Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

2. Déterminer la dimension de F et de G.

   On sait que
   $$F = \mathrm{Vect}((2,1,0),(1,0,1))$$
   Donc la famille $((2,1,0),(1,0,1))$ est génératrice de F par construction. De plus, la famille est libre (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires). Donc c'est une base de F. Ainsi,
   $$\boxed{\dim(F) = 2}$$
   On justifie de même que
   $$\boxed{\dim(G) = 2}$$

3. Déterminer la dimension de $F \cap G$.

   Soit $u \in F \cap G$. Alors, comme $u \in G$, il existe deux scalaires a et b tels que
   $$u = a \cdot (0,1,1) + b \cdot (-1,1,-1) = (-b, a+b, a-b)$$
   De plus, comme $u \in F$, les deux scalaires a et b doivent nécessairement vérifier
   $$-b - 2(a+b) + a - b = 0$$
   autrement dit,
   $$a = -4b.$$
   Donc nécessairement, le vecteur u est de la forme,
   $$u = (-b, -3b, -5b)$$
   Ainsi, on a montré que
   $$F \cap G \subset \{(-b,-3b,-5b) \mid b \in \mathbb{R}\}.$$
   On montre que l'autre inclusion est vraie et donc que, par double inclusion,
   $$F \cap G = \{(-b,-3b,-5b) \mid b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-1,-3,-5))$$
   La famille $((-1,-3,-5))$ est génératrice de $F \cap G$ et libre (le vecteur est non nul). Donc c'est une base de $F \cap G$. Ainsi,
   $$\boxed{\dim(F \cap G) = 1}$$

4. Déterminer la dimension de $F + G$.

   - Comme
     $$F = \mathrm{Vect}((2,1,0),(1,0,1)) \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}((0,1,1),(-1,1,-1))$$
     on a,
     $$F + G = \mathrm{Vect}((2,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(-1,1,-1))$$

La famille $((2,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(-1,1,-1))$ *est forcément liée car elle contient 4 vecteurs alors que l'espace ambiant* $\mathbb{R}^3$ *est de dimension 3...* Or, on peut remarquer que

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$F+G = \mathrm{Vect}((2,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$$

Puis, la famille $((2,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ est génératrice de $F+G$. On peut aussi montrer qu'elle est libre. Donc c'est une base de $F+G$ et

$$\dim(F+G) = 3$$

- De manière plus efficace, on pouvait utiliser la formule de Grassmann:

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3}$$

Exercice 14 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}.$$

On pourra commencer par étudier les cas $n = 2$ et $n = 3$.

- **Première étape : Trouver une famille génératrice.** On peut montrer que
$$F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots u_{n-1})$$
avec pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on pose $u_i = e_i - e_n$.
- **Deuxième étape : Extraire une famille libre.** La famille $(u_1, \ldots u_{n-1})$ est génératrice de F par construction. De plus, en passant par la définition (le système), on peut montrer qu'elle est libre. C'est donc une base de F.

Ainsi,
$$\boxed{\dim(F) = n - 1}$$

4 Utilisation de la notion de dimension

Exercice 15 – Pour montrer que deux ensembles sont égaux. On considère les ensembles

$$E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z = x-4t+2z = 0\right\}$$
$$F = \mathrm{Vect}\big((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)\big)$$

1. Déterminer la dimension de E.

   On peut montrer que
   $$F = \mathrm{Vect}((-2,1,1,0),(4,-4,0,1))$$
   On montre alors que la famille $((-2,1,1,0),(4,-4,0,1))$ est une base de E. Donc E est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4 \text{ de dimension } 2.}$

2. Déterminer la dimension de F.

   On peut montrer que la famille $((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2))$ est une base de F. Donc F est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4 \text{ de dimension } 2.}$

3. Montrer que $E = F$.

   Montrons que $E = F$.

   (a) Montrons que $F \subset E$. On remarque que
   $$\begin{array}{lcl} (2,1,-3,-1) \in E & \text{car} & 2+1-3 = 2-4(-1)+2(-3) = 0 \\ (2,-5,3,2) \in E & \text{car} & 2-5+3 = 2-4\cdot 2+2\cdot 3 = 0 \end{array}$$
   Ainsi, par stabilité par combinaison linéaire, $\boxed{F \subset E.}$

   (b) Montrons que les deux espaces sont de même dimension.
   - L'espace E est de dimension 2 (cf Question 1).
   - L'espace F est de dimension 2 aussi (cf Question 2).

   Donc $\boxed{\dim(F) = \dim(E)}$

   Donc $\boxed{E = F.}$

Exercice 16 – Pour montrer qu'une famille est une base. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

a) Montrer que la famille $((1,2),(3,4))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (en étant le plus *efficace* possible).

b) Montrer que la famille $((1,0,1),(0,1,0),(1,2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (en étant le plus *efficace* possible).

Notons $u_1=(1,0,1)$, $u_2=(0,1,0)$ et $u_3=(1,2,3)$. Montrons que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

① Montrons que la famille (u_1,u_2,u_3) est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_30$. On a

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3=0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3\leftarrow L_3-L_1 \\ \text{donc} & \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \end{array}$$

Donc la famille (u_1,u_2,u_3) est libre.

② On sait que $\dim(\mathbb{R}^3)=3$ et que $\mathrm{card}((u_1,u_2,u_3))=3$ donc $\mathrm{card}(u_1,u_2,u_3))=\dim(\mathbb{R}^3)$.

Donc $\boxed{\text{la famille } ((1,0,1),(0,1,0),(1,2,3)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

c) Montrer que la famille $(1,X,X(X-1),X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer les coordonnées de X^3 dans cette base.

d) Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, puis déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 17 – Pour montrer qu'une famille est une base. Déterminer à quelle·s condition·s sur le réel a, la famille suivante est une base de $\mathbb{R}^3$: $((1,-1,0),(2,-1,2),(1,0,a))$

Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$. On a,

$$\lambda_1(1,-1,0)+\lambda_2(2,-1,2)+\lambda_3(1,0,a)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -\lambda_1-\lambda_2=0 \\ 2\lambda_2+a\lambda_3=0. \end{cases}$$

Ce système est successivement équivalent à

$$\begin{aligned} & \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \quad L_2+L_1\to L_2 \\ 2\lambda_2+a\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \\ (a-2)\lambda_3 & = & 0 \quad L_3-2L_2\to L_3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Si $a\neq 2$, on obtient $\lambda_3=0$ et en remontant les calculs $\lambda_1=\lambda_2=0$. La famille est donc libre.
- Si $a=2$, alors le choix $\lambda_3=1,\lambda_2=-1$ et $\lambda_1=1$ donne une solution non nulle au système. Autrement dit, dans ce cas, on peut remarquer que

  $$(1,-1,0)-(2,-1,2)+(1,0,2)=(0,0,0)$$

  La famille n'est alors pas libre.

On conclut que $\boxed{\text{la famille est une base si et seulement si } a\neq 2.}$

Exercice 18 – On considère l'ensemble

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0 \text{ et } x-y+2z-2t = 0\}.$$

On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de F.

   L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec quatre inconnues et deux équations. Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$u \in F \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

   On a deux équations pour quatre inconnues : on choisit deux inconnues principales - par exemple x et y - que l'on exprime en fonction de deux inconnues restantes - z et t, grâce à la **méthode du pivot de Gauss**.

$$\begin{aligned} u \in F \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \quad -2y + z - 3t = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y = \frac{1}{2}z - \frac{3}{2}t \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{2}z + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}z - \frac{3}{2}t \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F \quad & \Leftrightarrow \quad u = (-\tfrac{3}{2}z + \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}z - \tfrac{3}{2}t, z, t) \\ & \Leftrightarrow \quad u = z(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 0) + t(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0, 1) \\ & \Leftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect}((-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 0), (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0, 1)) \end{aligned}$$

   Ainsi,

$$F = \mathrm{Vect}((-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1)) = \mathrm{Vect}((-3,1,2,0),(1,-3,0,2))$$

   - On obtient donc directement que la famille $((-3,1,2,0),(1,-3,0,2))$ est une famille génératrice de F.
   - De plus, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car s'il existe un réel λ tel que

$$(-3,1,2,0) = \lambda(1,-3,0,2)$$

     alors, en regardant la dernière coordonnée, on obtient $\lambda = 0$ ce qui ne va pas avec les autres coordoonées. Donc la famille $((-1,0,1,0),(0,-1,0,1))$ est libre.

   Finalement, $\boxed{\text{la famille } ((-3,1,2,0),(1,-3,0,2)) \text{ est une base de } F.}$

2. En déduire la dimension de F.

   D'après la Question 1, la famille $((-3,1,2,0),(1,-3,0,2))$ est une base de F. Or cette base contient deux vecteurs. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de $\boxed{\text{dimension } 2.}$

3. On considère la famille $\mathscr{B} = ((0,-4,1,3),(3,-1,-2,0))$.

   (a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre.

   Les deux vecteurs $(0,-4,1,3)$ et $(3,-1,-2,0)$ ne sont pas colinéaires car s'il existe un réel λ tel que

$$(0,-4,1,3) = \lambda(3,-1,-2,0)$$

   alors en regardant la première coordonnée, on obtient $\lambda = 0$ alors qu'en regardant la deuxième, on obtient $\lambda = 4$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{\text{la famille } \mathscr{B} \text{ est libre.}}$

   (b) En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de F.

- Tout d'abord, le vecteur $(0,-4,1,3)$ est bien **dans** F car

$$0-4+1+3=0 \quad \text{et} \quad 0-(-4)+2\times 1-2\times 3=0$$

  De même, le vecteur $(3,-1,-2,0)$ est bien dans F.
- De plus, d'après la Question 3(a), la famille $\mathscr{B}$ est **libre**.
- Enfin, la famille contient deux vecteurs, c'est-à-dire **autant que la dimension** de F d'après la Question 2.

Donc, la famille $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } F.}$

5 Somme et sous-espace supplémentaires

Exercice 19 – Démontrer que les espaces suivants sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E (en vous appuyant sur un argument de dimension).

1. Dans $E=\mathbb{R}^4$, $F_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-y=0 \text{ et } x+y-2z=0\}$ et $G_1=\text{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}=(1,0,0,0)$ et $\vec{v}=(1,1,0,0)$

   - Montrons que $\boxed{F_1\cap G_1=\{0\}.}$ Soit $(x,y,z,t)\in F_1\cap G_1$. Alors, d'une part
   $$x-y=0 \qquad \text{et} \qquad x+y-2z=0$$
   D'autre part,
   $$\exists a,b\in\mathbb{R}, \qquad (x,y,z,t)=a(1,0,0,0)+b(1,1,0,0)=(a+b,b,0,0).$$
   Comme $x-y=0$, on trouve $a=0$. Puis, comme $x+y-2z=0$, on trouve $b=0$. D'où
   $$(x,y,z,t)=(0,0,0,0)$$
   - Montrons que $\dim(F_1)+\dim(G_1)=\dim(E)$. On montre que
   $$\dim(G_1)=2$$
   et que
   $$F=\{(x,x,x,t)\in\mathbb{R}^4|x,t\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}((1,1,1,0),(0,0,0,1))$$
   et après que
   $$\dim(F)=2$$
   D'où
   $$\boxed{\dim(F_1)+\dim(G_1)=\dim(E)}$$

   Ainsi, $\boxed{E=F\oplus G.}$

2. Dans $E=\mathbb{R}_3[X]$, $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X]|P'(1)=0\}$ et $G=\text{Vect}(X^3+1)$.

   Soit $P=a+bX+cX^2+dX^3\in\mathbb{R}_3[X]$. Alors,
   $$\begin{aligned} P\in F &\iff P'(1)=0\\ &\iff b+2c+3d=0\\ &\iff b=-2c-3d\\ &\iff P=a+(-2c-3d)X+cX^2+dX^3\\ &\iff P=a+c(-2X+X^2)+d(-3X+X^3)\end{aligned}$$
   Donc
   $$F=\text{Vect}(1,-2X+X^2,-3X+X^3)$$
   - Montrons que $F_2\cap G_2=\{0\}$. Soit $P\in F_2\cap G_2$. Comme $P\in G_2$,
   $$\exists a\in\mathbb{R}, \qquad P=a(X^3+1)$$
   Comme $P\in F_2$,
   $$P'(1)=0$$
   Or $P'=3aX^2$. Donc on en déduit que $a=0$ puis que $P=0$.
   - Montrons que $\dim(F_2)+\dim(G_2)=\dim(E)$. D'une part, on peut montrer que
   $$\dim(G_2)=1$$
   (car (X^3+1) famille génératrice de G_2 et libre car polynome non nul). De même, on peut montrer que
   $$\dim(F_2)=3$$
   car $(1,-2X+X^2,-3X+X^3)$ famille génératrice de F_2 et libre (car degrés échelonnés). D'où
   $$\dim(F_2)+\dim(G_2)=\dim(\mathbb{R}_3[X])=4$$

D'où $\boxed{E = F_2 \oplus G_2.}$

3. Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,

$$F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a - c + d = b + c - d = 0 \right\}$$
$$G_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

On peut commencer par montrer que

$$F_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

et que

$$G_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

car

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et dérouler la même méthode que précédemment.

Exercice 20 – Soient $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0\}$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}$.

1. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels et en déterminer des familles génératrices.

   On peut montrer que
   $$F=\mathrm{Vect}((1,1,0),(2,0,1))$$
   et que
   $$G=\mathrm{Vect}((-1,1,0),(0,0,1))$$

2. Déterminer une famille génératrice de $F\cap G$. A-t-on $F\oplus G=\mathbb{R}^3$?

   On a,
   $$\begin{aligned}(x,y,z)\in F\cap G &\iff \begin{cases} x-y+2z=0\\ x+y=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x-y+2z=0\\ 2y-2z=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x-y+2z=0\\ y=z\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x=-z\\ y=z\end{cases}\\ &\iff (x,y,z)=(-z,z,z)\end{aligned}$$
   D'où
   $$F\cap G=\mathrm{Vect}((-1,1,1))$$

   D'une part, $F\cap G\neq\{0\}$, donc la somme $F+G$ n'est pas directe. Donc, on ne peut pas avoir $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.
   D'autre part, $\dim(F)+\dim(G)\neq\dim(\mathbb{R}^3)$, donc c'est un autre argument pour dire qu'on ne peut pas avoir $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.

3. Soit $H=\mathrm{Vect}((1,0,0))$. Montrer que $F\oplus H=G\oplus H=\mathbb{R}^3$.

   Montrons que $F\oplus H=\mathbb{R}^3$
   - Montrons que $F\cap H=\{0\}$. Soit $(x,y,z)\in F\cap H$. Comme $(x,y,z)\in F$, on a
     $$x-y+2z=0$$
     Comme $(x,y,z)\in H$, on a,
     $$\exists a\in\mathbb{R},\qquad (x,y,z)=a(1,0,0)=(a,0,0)$$
     En combinant les deux informations, on trouve que $a=0$. Puis que $(x,y,z)=(0,0,0)$.
   - D'autre part, on peut montrer que $\dim(F)=2$ et $\dim(H)=1$. Donc, on a bien $\dim(F)+\dim(H)=\dim(\mathbb{R}^3)$.

   D'où $\boxed{F\oplus H=\mathbb{R}^3.}$ (On montre de même que $G\oplus H=\mathbb{R}^3$.)

Exercice 21 –

1. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x+y+2z = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

   On peut commencer par montrer que
   $$F = \mathrm{Vect}((1,2,0),(0,-2,1))$$
   Il s'agit alors d'arriver à compléter la famille $((1,2,0),(0,-2,1))$ en une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 1$, il nous manque un vecteur. On peut choisir un vecteur parmi la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour compléter, en prenant garde à en choisir un qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs déjà présent. On peut montrer que la famille $((1,2,0),(0,-2,1),(1,0,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (car libre et contient trois vecteurs). Alors
   $$\boxed{G = \mathrm{Vect}((1,0,0))}$$
   est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$. Déterminer un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$.

   On peut commencer par montrer que
   $$G = \mathrm{Vect}((2,1,2/3)) = \mathrm{Vect}((6,3,2))$$
   Alors on peut montrer que la famille $((6,3,2))$ peut se compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ par $((6,3,2),(1,0,0),(0,0,1))$ et donc que
   $$\boxed{H = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,0,1))}$$
   est un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer un supplémentaire de $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(X) = P(-X)\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.

   Notons $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(X) = P(-X)\}$. Soit $P = a+bX+cX^2+dX^3+eX^4 \in \mathbb{R}_4[X]$. On a,
   $$\begin{aligned} P \in F &\iff P(X) = P(-X) \\ &\iff a+bX+cX^2+dX^3+eX^4 = a-bX+cX^2-dX^3+eX^4 \\ &\iff 2bX+2dX^3 = 0 \\ &\iff b = d = 0 \\ &\iff P = a+cX^2+eX^4 \end{aligned}$$
   Donc,
   $$F = \mathrm{Vect}(1,X^2,X^4)$$
   Puis, on montre que
   $$\boxed{G = \mathrm{Vect}(X^3,X)}$$
   est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 22 – Dans $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère $F = \mathrm{Vect}(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $G = \mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de E.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, puis déterminer leur dimension.

   On a
   $$F = \mathrm{Vect}(A)$$
   avec $A \neq 0$. Donc F est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel de dimension 1}}$ de E. De plus, on montre que
   $$G = \mathscr{D}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$
   Ainsi, G est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel de dimension 2}}$ de E.

2. Expliciter $F+G$. La somme est-elle directe? F et G sont-ils supplémentaires?

   On a,
   $$\begin{aligned} F+G &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$
   $F+G$ est donc l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille 2x2.

   - On peut montrer que $F \cap G = \{0_2\}$. Donc $\boxed{\text{la somme } F+G \text{ est directe.}}$
   - Par contre, $F+G \neq \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ (tous les matrices ne sont pas triangulaires supérieures) donc les espaces ne sont $\boxed{\text{pas supplémentaires.}}$

3. Déterminer un supplémentaire de G dans E.

   On a,
   $$G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$
   On peut montrer que la famille
   $$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$
   est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ (libre + bon nombre d'éléments) donc
   $$\boxed{H = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)}$$
   est un supplémentaire de G dans E.

Exercice 23 – On considère les polynômes suivants:
$P_0 = X^2 - 2, \quad P_1 = (X-1)(X+1), \quad P_2 = (X-2)(X+1) \quad$ et $\quad P_3 = (X-1)(X+2).$

1. La famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est-elle libre dans $\mathbb{R}_2[X]$?

   La famille (P_0, P_1, P_2, P_3) n'est $\boxed{\text{pas libre}}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ car $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, donc une famille libre a au plus trois éléments.

2. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$. En évaluant en $X = 1$, on obtient $\lambda_2 = 0$, puis en évaluant en $X = -1$, on obtient $\lambda_3 = 0$, et finalement $\lambda_1 = 0$. Donc (P_1, P_2, P_3) est libre. Composée de trois éléments dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3, (P_1, P_2, P_3) est $\boxed{\text{une base de } \mathbb{R}_2[X].}$

3. Déterminer les coordonnées de P_0 dans la base (P_1, P_2, P_3).

   On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}_3$ tel que $P_0 = aP_1 + bP_2 + cP_3$. Par évaluation ou résolution d'un système, on obtient $a = 0$, $b = 1/2$ et $c = 1/2$. Les coordonnées de P_0 dans la base (P_1, P_2, P_3) sont donc $\boxed{(0, 1/2, 1/2).}$

4. Déterminer un supplémentaire de $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

   La famille (P_1, P_2, P_3) est libre (cf Question 2). Comme $X^3 \notin \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$, la famille (P_1, P_2, P_3, X^3) est libre. Composée de 4 éléments dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 4, c'est une base de $\mathbb{R}_4[X]$. L'espace $\boxed{G = \mathrm{Vect}(X^3)}$ est donc un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 24 –

1. Calculer la dimension de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ et de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$. Plus généralement, proposer une expression de $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))$ et de $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))$ en fonction de n.

   Cas $n = 3$. Soit $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & f \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
A \in \mathscr{A}_3(R) &\Leftrightarrow A^\top = -A \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & c & h \\ c & b & i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow a = -a, d = -b, g = -c, b = -d, c = -c, \\
&h = -b, c = -g, b = -h, i = -i \\
&\Leftrightarrow a = 0, c = 0, i = 0, d = -b, g = -c, h = -b \\
&\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, b, c, f \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

   On montre ensuite que

$$\boxed{\dim(\mathscr{A}_3(\mathbb{R})) = 3}$$

   De même, on montre que

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\Big(&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Big)
\end{aligned}$$

   et que

$$\boxed{\dim(\mathscr{S}_3(\mathbb{R})) = 6}$$

   Cas n qcq. On montre que

$$\boxed{\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{(n-1)n}{2}}$$

   et que

$$\boxed{\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{(n+1)n}{2}}$$

2. En utilisant un argument de dimension, en déduire que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

- Montrons que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
  - Comme $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on sait que

$$M^\top = M$$

  - Comme $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, on sait que

$$M^\top = -M$$

  En combinant les deux informations, on sait que

$$M^\top = M = -M$$

  Donc $M = 0$.
- D'après la question précédente, on a,

$$\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))$$

D'où

$$\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$$

6 Rang d'une famille

Exercice 25 – Déterminer le rang des familles suivantes, et indiquer si chaque famille est libre, génératrice ou une base de E.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $((1,1,0),(2,1,1))$ $\boxed{\text{rang} = 2}$
2. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $(X^2+X+3, X^2-X-3, 2X^2-X-6)$ $\boxed{\text{rang} = 3}$
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $(-1+X, 2+X^2, 1+X+X^2)$

   $\boxed{\text{rang} =}$ 2 car
   $$1+X+X^2 = 1\cdot(-1+X)+1\cdot(2+X^2)$$
4. $E = \mathbb{R}^3$, $((1,-1,1),(-1,1,-1),(0,1,1),(1,0,2))$

   $\boxed{\text{rang} = 3}$ car
   $$(1,-1,1)+(-1,1,-1) = (0,0,0)$$
5. $E = \mathbb{R}^4$, $((1,1,0,1),(1,-1,1,0),(2,0,1,1),(0,-2,1,-1))$

   $\boxed{\text{rang} = 2}$ car
   $$(1,1,0,1)+(1,-1,1,0) = (2,0,1,1)$$
   et car
   $$-(1,1,0,1)+(1,-1,1,0) = (0,-2,1,-1)$$

7 Approfondissement

Exercice 26 – Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Rappeler la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

   On a $\boxed{\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) = n^2.}$

2. Justifier que la famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2})$ est liée.

   On a $\operatorname{card}(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}) = n^2 + 1 > \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$ donc la famille ne peut pas être libre, elle est $\boxed{\text{liée.}}$

3. En déduire l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(A) = 0_n$.

   La famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2})$ est liée : il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n^2} \in \mathbb{K}$ (non tous nuls) tel que

   $$\lambda_0 I_n + \cdots + \lambda_{n^2} A^{n^2} = 0$$

   Posons

   $$\boxed{P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n^2} X^{n^2}} \in \mathbb{K}[X]$$

   Alors $P \neq 0$ (car les scalaires sont non tous nuls) et

   $$P(A) = 0$$

Exercice 27 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel et en déterminer une base.

Soit $P \in R_n[x]$.

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow P(\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow (X-\alpha) \mid P \\ &\Leftrightarrow P = (X-\alpha)Q \text{ avec } Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ &\Leftrightarrow P = (X-\alpha)\left(a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}\right) \\ &\Leftrightarrow P = a_0(X-\alpha) + a_1 X(X-\alpha) \ldots + a_{n-1}, X^{n-1}(X-\alpha) \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}(X-\alpha, X(X-\alpha), \ldots, X^{n-1}(X-\alpha))}$$

La famille $\boxed{(X-\alpha, X(X-\alpha), \ldots, X^{n-1}(X-\alpha))}$ est donc génératrice de F. De plus, la famille est libre (car degrés échelonnés). Donc c'est une $\boxed{\text{base de } F.}$