DS 4

Samedi 24 janvier 2026, de 8h à 12h

Les règles à respecter sont celles habituelles, ne sont donc pas rappelées mais doivent néanmoins être respectées. On donne seulement ci-dessous un extrait d'un rapport de jury de l'année dernière.

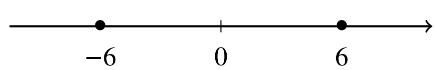
> « *Le barème des épreuves permet la prise en compte de manière positive et négative du soin et de la clarté des copies. Les copies très bien présentées, les raisonnements clairs, précis et élégants sont* **valorisés parfois** **au-delà** **du barème prévu** *pour les questions.*»

Exercice 1 – *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. On s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^{2t}$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Donner l'équation différentielle homogène associée (E_0) et la résoudre.
   (b) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E).
   (c) En déduire la résolution de l'équation différentielle (E).
2. Montrer que
$$\forall x \in [1,3], \qquad \frac{1}{21} \leq \frac{-x+4}{2x^2+3} \leq \frac{3}{5}$$
3. Donner la valeur des parties entières suivantes :
   a) $\lfloor 2.3 \rfloor$ b) $\lfloor -\frac{1}{3} \rfloor$ c) $\lfloor \pi \rfloor$
4. Déterminer le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence de la manière suivante :
   a) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 1$ b) $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = -v_n$
5. Énoncer le théorème de la limite monotone (pour une suite croissante). *On illustrera graphiquement ce théorème.*
6. Calculer la limite des suites suivantes.
   a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n$ b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n^2+1}{2n^2+n}$ c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n+\ln(n)}{\exp(n)+n^2}$

Exercice 2 – Dans cet exercice, on s'intéresse à l'inéquation
$$(I) \qquad |-x^2 - 3x + 4| \geq 6$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Dans un premier temps, on souhaite résoudre cette inéquation de manière calculatoire.

1. Recopier sur votre copie le schéma suivant (représentant la droite réelle) et y colorier la région correspondant aux nombres réels dont la distance à 0 est supérieure ou égale à 6.



2. En déduire que la résolution de (I) est liée à la résolution de deux inéquations que l'on explicitera.
3. Résoudre l'inéquation $-x^2 - 3x - 2 \geq 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. On admet que l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 - 3x + 10 \leq 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est $]-\infty, -5] \cup [2, +\infty[$. En déduire l'ensemble des solutions de (I).

On souhaite maintenant résoudre l'inéquation (I) de manière graphique.

5. Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto -x^2 - 3x + 4$. *On calculera au préalable les racines de ce polynôme. Indication : Pour améliorer la précision du tracé, on pourra placer le sommet de la parabole en* $(-1.5, 6.25)$.
6. Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto -(-x^2 - 3x + 4)$.
7. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe de la fonction $x \mapsto |-x^2 - 3x + 4|$.
8. Faire apparaître sur le graphe de la question précédente la résolution graphique de l'inéquation (I) et retrouver le résultat de la question 4.

Exercice 3 – Le but de cet exercice est d'étudier plusieurs équations différentielles.

Partie 1. Du classico-classique. On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(F) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = t^2 + 3$$

1. Résoudre (F_0) l'équation homogène associée à (F).
2. Déterminer une solution particulière de (F). *On pourra chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto at^2 + bt + c$ avec a, b, c trois constantes réelles à déterminer.*
3. En déduire l'ensemble des solutions de (F).
4. Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} z'' - 2z' + z = t^2 + 3 \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 1 \end{cases}$$

Partie 2. Une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants. On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(G) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0.$$

5. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On définit ψ sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \psi(x) = \frac{y(x)}{x}$$

puis on pose également $\varphi = \psi'$.
   (a) Exprimer y' et y'' en fonction de ψ, φ et de φ'.
   (b) Montrer que

$$y \text{ est solution de } (G) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ vérifie } \forall x > 0, \ \varphi'(x) + \frac{1}{x}\varphi(x) = 0$$

   (c) Résoudre l'équation différentielle $\varphi' + \frac{1}{x}\varphi = 0$ sur $]0, +\infty[$.
   (d) En déduire l'ensemble des solutions de (G).
6. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}, z(t) = y\left(e^t\right)$.
   (a) Montrer que y est solution de (G) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.
   (b) En déduire à nouveau l'ensemble des solutions de (G).

Partie 3. Une équation fonctionnelle. On considère l'équation fonctionnelle suivante d'inconnue f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(H) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

7. Montrer que si f est une solution de (H) alors

$$\forall x > 0, \qquad f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} f(x)$$

8. En déduire que si f est une solution de (H) alors f est une solution de (G).
9. Résoudre (H).

Exercice 4 – On considère la matrice P suivante.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. *On fera apparaître sur la copie la vérification du résultat obtenu.*
2. On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x & & - & z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & & & = & -1 \end{cases}$$

   d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Donner l'interprétation matricielle de ce système linéaire.
   (b) En déduire que ce système linéaire admet une unique solution que l'on déterminera.
3. On considère maintenant la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer $T = P^{-1}AP$. On doit obtenir une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$$

   (b) Calculer T^2 et T^3.
   (c) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}, T^n$. *On pourra commencer par énoncer une conjecture grâce aux calculs de la question précédente, puis on pourra démontrer cette conjecture par récurrence.*
   (d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
   (e) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n$. *On demande de calculer explicitement ses neuf coefficients.*
4. On considère trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par, $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $w_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = -2u_n - w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

   On pose également,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

   (a) Que vaut X_0 ? Que vaut X_1 ?
   (b) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = AX_n$$

   (c) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^n X_0$$

   (d) En déduire l'expression explicite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5 – Soit $f : x \mapsto x - \ln(x)$

Partie 1. Étude de f.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Donner le tableau de variations de f. *On admet que*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Tracer l'allure représentative de la courbe de la fonction f.
4. La fonction f est-elle majorée ? minorée ?

Partie 2. Étude d'une suite implicite.

5. Démontrer que la fonction f est bijective de $]1, +\infty[$ vers un intervalle à déterminer.
6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in]1, +\infty[$ tel que $f(x_n) = n$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est croissante.
8. En déduire qu'il existe seulement deux comportements possibles (à expliciter) pour la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.
9. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ diverge vers $+\infty$.
10. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(2x) \leq x$.
11. En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $n \leq x_n \leq 2n$.
12. Re-démontrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ diverge vers $+\infty$.

Partie 3. Étude d'une suite explicite récurrente. On fixe $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = f(u_n)$.

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$. *On pourra s'appuyer sur la monotonie de f pour l'hérédité de la récurrence.*
14. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et préciser sa monotonie.
15. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, que l'on notera ℓ.
16. Donner un encadrement sur la valeur de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
17. Déterminer la valeur de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$$

18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n \geqslant 1$.
19. Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) = u_0 - u_{n+1}$$

21. En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.