

DS 4

Samedi 24 janvier 2026, de 8h à 12h

Exercice 1 – Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^{2t}$ sur \mathbb{R} .

(a) Donner l'équation différentielle homogène associée (E_0) et la résoudre.

L'équation différentielle homogène associée est

$$(E_0) \quad y' - y = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du **premier ordre homogène à coefficient constant**. Les solutions sont de la forme:

$$t \mapsto Ae^t \quad \text{avec } A \text{ une constante réelle}$$

(b) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Le **second membre** est une **exponentielle** (sans résonance). On peut chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_p : t \mapsto ce^{2t}$ où a est une constante à déterminer par substitution. On a:

$$\begin{aligned} y_p : t \mapsto ce^{2t} \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, y_p'(t) - y_p(t) = e^{2t} t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 2ce^{2t} - ce^{2t} = e^{2t} \\ &\Leftrightarrow c = 1 \\ &\Leftrightarrow y_p : t \mapsto e^{2t} \end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière sur \mathbb{R} de cette équation différentielle est la fonction

$$y_p : t \mapsto e^{2t}.$$

(c) En déduire la résolution de l'équation différentielle (E).

Grâce aux deux questions précédentes, on sait que les solutions de (E) sont de la forme

$$t \mapsto Ae^t + e^{2t} \quad \text{avec } A \text{ une constante réelle}$$

2. Montrer que

$$\forall x \in [1, 3], \quad \frac{1}{21} \leq \frac{-x+4}{2x^2+3} \leq \frac{3}{5}$$

Soit $x \in [1, 3]$. D'une part, on sait que

$$\begin{aligned} &1 \leq x \leq 3 \\ \text{donc} & -3 \geq -x \geq -1 \quad \text{car } -1 < 0 \\ \text{donc} & 1 \geq -x+4 \geq 3 \end{aligned}$$

D'autre part, on sait que

$$\begin{aligned} &1 \leq x \leq 3 \\ \text{donc} & 1 \leq x^2 \leq 9 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } [0, +\infty[\\ \text{donc} & 2 \leq 2x^2 \leq 18 \\ \text{donc} & 5 \leq 2x^2 + 3 \leq 21 \\ \text{donc} & \frac{1}{21} \leq \frac{1}{2x^2+3} \leq \frac{1}{5} \quad \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[\end{aligned}$$

En multipliant deux les inégalités (car tous les termes sont positifs), on obtient que

$$\frac{1}{21} \leq \frac{-x+4}{2x^2+3} \leq \frac{3}{5}$$

3. Donner la valeur des parties entières suivantes :

a) $[2.3] = 2$

b) $[-\frac{1}{3}] = -1$

c) $[\pi] = 3$

4. Déterminer le terme général des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par récurrence de la manière suivante :

a) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 1$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **arithmétique** de raison $r = 1$ et de premier terme $u_0 = 2$. Ainsi, son terme général est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 + n$$

b) $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -v_n$

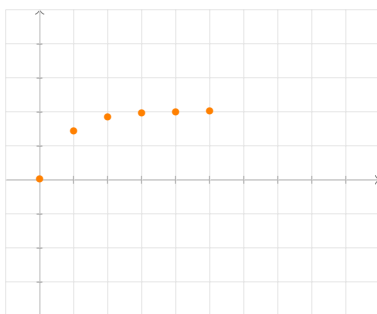
La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **géométrique** de raison $r = -1$ et de premier terme $v_0 = 1$. Ainsi, son terme général est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 \times (-1)^n = (-1)^n$$

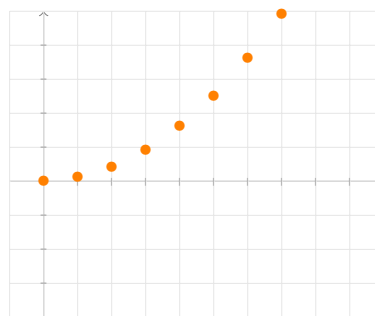
5. Énoncer le théorème de la limite monotone (pour une suite croissante). *On illustrera graphiquement cette proposition.*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **croissante**.

- Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** et alors elle converge.
- Soit elle diverge vers $+\infty$.



La suite est croissante et majorée, elle converge vers un réel.



La suite est croissante et non majorée, elle diverge donc vers $+\infty$.

6. Calculer la limite des suites suivantes.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n$

En reconnaissant deux suites géométriques, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{car } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \quad \text{car } 2 \geq 0$$

Ainsi, par somme,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^2+1}{2n^2+n}$

On peut commencer par remarquer que

$$\frac{n^2+1}{2n^2+n} \sim \frac{n^2}{2n^2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{n^2+1}{2n^2+n} \sim \frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n} = \frac{1}{2}}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n+\ln(n)}{\exp(n)+n^2}$

On peut commencer par remarquer que

$$\frac{n+\ln(n)}{\exp(n)+n^2} \sim \frac{n}{\exp(n)}$$

Ainsi, en utilisant les croissances comparées, on obtient,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+\ln(n)}{\exp(n)+n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\exp(n)} = 0}$$

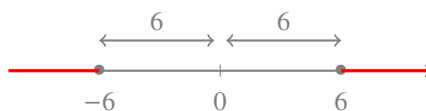
Exercice 2 – Dans cet exercice, on s'intéresse à l'inéquation

$$(I) \quad | -x^2 - 3x + 4 | \geq 6$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Dans un premier temps, on souhaite résoudre cette inéquation de manière calculatoire.

1. Recopier sur la copie le schéma suivant (représentant la droite réelle) et y faire apparaître les nombres réels dont la distance à 0 est supérieure ou égale à 6.

On représente ci-dessous en rouge l'ensemble des nombres réels dont la distance à 0 est supérieure ou égale à 6.



2. En déduire que la résolution de (I) est liée à la résolution de deux inéquations que l'on explicitera.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par propriété de la valeur absolue, on a,

$$\begin{aligned} | -x^2 - 3x + 4 | \geq 6 &\Leftrightarrow -x^2 - 3x + 4 \geq 6 \quad \text{ou} \quad -x^2 - 3x + 4 \leq -6 \\ &\Leftrightarrow -x^2 - 3x - 2 \geq 0 \quad \text{ou} \quad -x^2 - 3x + 10 \leq 0 \end{aligned}$$

3. Résoudre l'inéquation $-x^2 - 3x - 2 \geq 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Afin de dresser le tableau de signes du polynôme $x \mapsto -x^2 - 3x - 2$, commençons par calculer son discriminant :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1.$$

Puisque $\Delta > 0$, le polynôme a deux racines qui sont données par

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = \frac{3 - 1}{-2} = -1$$

et

$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = \frac{3 + 1}{-2} = -2.$$

Comme de plus son coefficient dominant est négatif (il vaut -1), on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$	
Signe de $-x^2 - 3x - 2$	-	0	+	0	-

ce qui montre que l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 - 3x - 2 \geq 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est

$$\boxed{[-2, -1]}$$

4. On admet que l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 - 3x + 10 \leq 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est $]-\infty, -5[\cup [2, +\infty[$. En déduire l'ensemble des solutions de (I).

Soit $x \in \mathbb{R}$. En reprenant le raisonnement de la Question 2, on a,

$$\begin{aligned} | -x^2 - 3x + 4 | \geq 6 &\Leftrightarrow -x^2 - 3x - 2 \geq 0 \quad \text{ou} \quad -x^2 - 3x + 10 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in [-2, -1] \quad \text{ou} \quad x \in]-\infty, -5[\cup [2, +\infty[\\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty, -5[\cup [-2, -1] \cup [2, +\infty[\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (I) est

$$\boxed{]-\infty, -5] \cup [-2, -1] \cup [2, +\infty[}$$

On souhaite retrouver le résultat de la dernière question de manière graphique.

5. Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto -x^2 - 3x + 4$. *Indication : Pour améliorer la précision du tracé, on pourra placer le sommet de la parabole en $(-1.5, 6.25)$. On calculera au préalable les racines du polynôme.*

Afin de tracer la courbe du polynôme $x \mapsto -x^2 - 3x + 4$, commençons par déterminer ses racines. On calcule pour cela son discriminant

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 9 + 16 = 25.$$

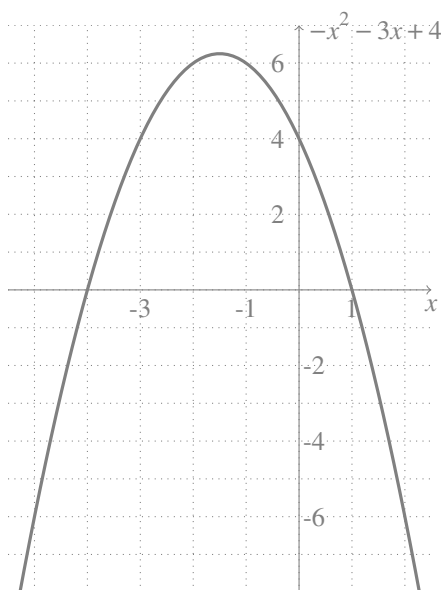
Ses racines sont donc

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = \frac{3 - 5}{-2} = 1$$

et

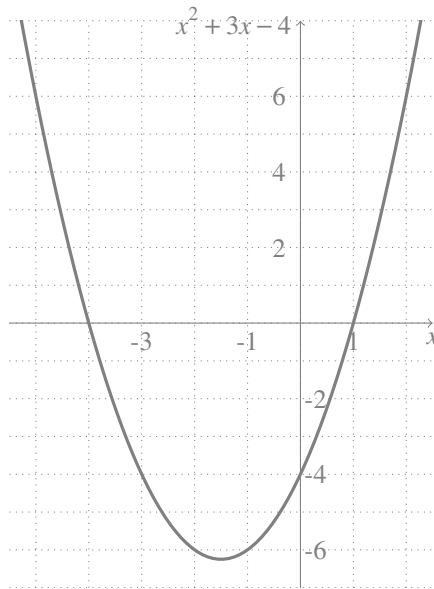
$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = \frac{3 + 5}{-2} = -4.$$

En ajoutant l'indication, on sait donc que l'on doit tracer une parabole tournée vers le bas, dont les racines sont -4 et 1 et dont le sommet se trouve à peu près en $(-1.5, 6.25)$. Cela donne :



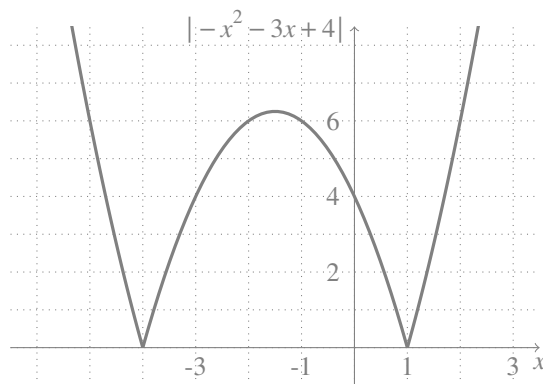
6. Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto -(-x^2 - 3x + 4)$.

Grâce à la question précédente, on trace facilement :



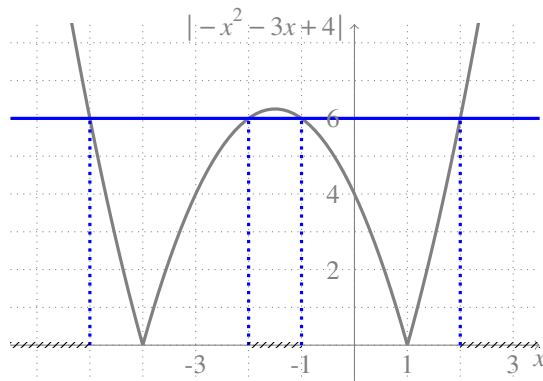
7. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe de la fonction $x \mapsto |-x^2 - 3x + 4|$.

Grâce aux deux questions précédentes, on trace la courbe demandée :



8. Faire apparaître sur le graphe de la question précédente, la résolution de l'inéquation (I) et retrouver le résultat de la question 4.

On reprend la représentation graphique de la question précédente et on cherche les abscisses pour lesquelles la courbe est au dessus de la "hauteur" 6 :



Graphiquement, on voit que les abscisses recherchées forment l'ensemble

$]-\infty, -5] \cup [-2, -1] \cup [2, +\infty[$, ce qui correspond bien au résultat de la question 4).

Exercice 3 – Le but de cette exercice est d'étudier plusieurs équations différentielles.

Partie 1. Du classico-classique. On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue z une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

$$(F) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = t^2 + 3$$

1. Résoudre (F_0) l'équation homogène associée à (F) .

L'équation différentielle homogène associée à (F) est donnée par

$$(F_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire **d'ordre 2 à coefficients constants**. On commence donc par étudier son équation caractéristique donnée par

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \quad \text{c-à-d} \quad (r - 1)^2 = 0$$

Ainsi, l'équation caractéristique admet une unique solution qui vaut 1. Donc les solutions de l'équation différentielle homogène (F_0) sont de la forme

$$t \mapsto (At + B)e^t \quad \text{avec } A, B \text{ deux constantes réelles.}$$

2. Déterminer une solution particulière de (F) . On pourra chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto at^2 + bt + c$ avec a, b, c trois constantes réelles à déterminer.

Le **second membre** est un **polynôme** de degré 2. On peut chercher une solution particulière de (F) sous la forme $y_p : t \mapsto at^2 + bt + c$ où a, b, c sont des constantes à déterminer par substitution Soient a, b, c trois réels et $y_p : t \mapsto at^2 + bt + c$. La fonction y_p est dérivable deux fois sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_p''(t) - 2y_p'(t) + y_p(t) = t^2 + 3 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2a - 2(2at + b) + at^2 + bt + c = t^2 + 3 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad at^2 + (b - 4a)t + 2a - 2b + c = t^2 + 0t + 3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ 2a - 2b + c = 3 \end{cases} && \text{(identification des coefficients)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y_p : t \mapsto t^2 + 4t + 9 \end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière sur \mathbb{R} de cette équation différentielle est la fonction

$$y_p : t \mapsto t^2 + 4t + 9$$

3. En déduire l'ensemble des solutions de (F) .

En utilisant les deux questions précédentes, on en déduit que les solutions de (F) sont de la forme

$$t \mapsto (At + B)e^t + t^2 + 4t + 9 \quad \text{avec } A, B \text{ deux constantes réelles.}$$

4. Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} z''(t) - 2z'(t) + z(t) = t^2 + 3 \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 1 \end{cases}$$

Soit z une solution du problème de Cauchy. D'après la question précédente, il existe A et B deux constantes réelles telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = (At + B)e^t + t^2 + 4t + 9$$

On peut alors calculer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = Ae^t + (At + B)e^t + 2t + 4$$

Puis, on trouve les valeurs de A et B grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} z(0) = 0 \\ z'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + 9 = 0 \\ A + B + 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -9 \\ A = 6 \end{cases}$$

On en déduit que le problème de Cauchy admet une unique solution donnée par

$$t \mapsto (6t - 9)e^t + t^2 + 4t + 9$$

Partie 2. Une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants. On considère l'équation suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* :

$$(G) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0.$$

5. Soit y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* . On pose

$$\psi : \begin{matrix} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{y(x)}{x} \end{matrix}$$

puis $\varphi = \psi'$.

(a) Exprimer y' et y'' en fonction de ψ , φ et de φ' .

Par définition de la fonction ψ , on sait que

$$\forall x > 0, \quad y(x) = x\psi(x)$$

En dérivant cette expression, on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad y'(x) = \psi(x) + x\psi'(x) = \psi(x) + x\varphi(x)$$

En dérivant de nouveau cette expression, on trouve

$$\forall x > 0, \quad y''(x) = \psi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 2\varphi(x) + x\varphi'(x)$$

(b) Montrer que

$$y \text{ est solution de } (G) \Leftrightarrow \varphi \text{ vérifie } \forall x > 0, \quad \varphi'(x) + \frac{1}{x}\varphi(x) = 0$$

En utilisant les calculs de la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
 \boxed{y \text{ est solution de } (G)} &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad x^2(2\varphi(x) + x\varphi'(x)) - x(\psi(x) + x\varphi(x)) + x\psi(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad 2x^2\varphi(x) + x^3\varphi'(x) - x\psi(x) - x^2\varphi(x) + x\psi(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad x^3\varphi'(x) + x^2\varphi(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad \varphi'(x) + \frac{1}{x}\varphi(x) = 0 \quad \text{car } x \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \boxed{\varphi \text{ vérifie } \forall x > 0, \quad \varphi'(x) + \frac{1}{x}\varphi(x) = 0}
 \end{aligned}$$

(c) Résoudre l'équation différentielle $\varphi' + \frac{1}{x}\varphi = 0$.

L'équation différentielle

$$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) + \frac{1}{x}\varphi(x) = 0$$

est une équation différentielle linéaire du *premier ordre homogène*. Ainsi, les solutions sont de la forme

$$x \mapsto A \exp(-\ln(|x|)) \quad \text{avec } A \text{ une constante réelle}$$

c'est-à-dire (car on travaille sur $]0, +\infty[$) :

$$\boxed{x \mapsto \frac{A}{x} \quad \text{avec } A \text{ une constante réelle}}$$

(d) En déduire l'ensemble des solutions de (G).

En utilisant les deux questions précédentes, on obtient,

$$\begin{aligned}
 y \text{ est solution de } (G) &\Leftrightarrow \varphi \text{ vérifie } \forall x > 0, \quad \varphi'(x) + \frac{1}{x}\varphi(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0, \quad \varphi(x) = \frac{A}{x} \\
 &\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0, \quad \psi'(x) = \frac{A}{x} \\
 &\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0, \quad \psi(x) = A \ln(|x|) + B \quad \text{en primitivant} \\
 &\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0, \quad \psi(x) = A \ln(x) + B \quad \text{car } x > 0 \\
 &\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0, \quad y(x) = x\psi(x) = Ax \ln(x) + Bx
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a prouvé que les solutions de (G) sont de la forme

$$\boxed{x \mapsto Ax \ln(x) + Bx \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes}}$$

6. Soit y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* . On pose pour tout $t \in \mathbb{R}, z(t) = y(e^t)$.

(a) Justifier que z est deux fois dérivable et montrer que y est solution de (G) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.

Tout d'abord, on peut remarquer que

$$\forall x > 0, \quad y(x) = z(\ln(x))$$

Donc, en dérivant cette expression, on obtient,

$$\forall x > 0, \quad y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln(x))$$

puis, en dérivant une nouvelle fois, on obtient,

$$\forall x > 0, \quad y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2}z''(\ln(x))$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \boxed{y \text{ est solution de } (G)} &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad x^2 \left(-\frac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2}z''(\ln(x)) \right) - x \left(\frac{1}{x}z'(\ln(x)) \right) + z(\ln(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad -z'(\ln(x)) + z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) + z(\ln(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0, \quad z''(\ln(x)) - 2z'(\ln(x)) + z(\ln(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0 \quad \text{en posant } \ll t = \ln(x) \gg \\ &\Leftrightarrow \boxed{z \text{ est solution de } (F_0) \text{ (cf Question 1)}} \end{aligned}$$

(b) En déduire à nouveau l'ensemble des solutions de (G).

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (G) &\Leftrightarrow z \text{ est solution de } (F_0) \\ &\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = (At + B)e^t \text{ (cf Question 1)} \\ &\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0, y(x) = z(\ln x) = (A \ln x + B)e^{\ln x} \\ &\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0, y(x) = z(\ln x) = (A \ln x + B)x \\ &\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0, y(x) = z(\ln x) = Ax \ln(x) + Bx \end{aligned}$$

Ainsi, on a prouvé de nouveau que les solutions de (G) sont de la forme

$$\boxed{x \mapsto Ax \ln(x) + Bx \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes}}$$

Partie 3. Une équation fonctionnelle. On considère l'équation fonctionnelle suivante d'inconnue f une fonction dérivable sur \mathbb{R}_+^* :

$$(H) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

7. Montrer que si f est une solution de (H) alors

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}f(x)$$

Soit f est une solution de (H). Soit $x > 0$. On sait que alors que

$$f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

En dérivant cette expression, on en déduit que

$$f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) f'\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or, en utilisant (H) avec $\tilde{x} = \frac{1}{x} > 0$, on a,

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} f(x)$$

Ainsi,

$$\boxed{f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}f(x)}$$

8. En déduire que si f est une solution de (H) alors f est une solution de (G) .

Soit f est une solution de (H) . Soit $x > 0$. On sait que

$$f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

D'après la question précédente, on sait aussi que

$$f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}f(x)$$

Ainsi, on peut calculer que

$$\begin{aligned}x^2 f''(x) - x f'(x) + f(x) &= x^2 \times \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} f(x) \right) - x \times x f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) \\ &= x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) - x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc, la fonction f est une solution de (G) .

9. Résoudre (H) .

Procédons par *analyse-synthèse*.

- *Analyse*. Soit f une solution de (H) . D'après la question précédente, f est une solution de (G) . Donc, en utilisant le résultat de la Partie 2 (cf Question 5d ou 6b), on en déduit qu'il existe A et B deux constantes telles que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = Ax \ln(x) + Bx$$

Or, comme f est une solution de (H) , on peut remarquer que nécessairement

$$f'(1) = f(1)$$

ce qui implique que $A = 0$.

- *Synthèse*. On vérifie que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto Bx$ avec B une constante réelle sont bien solutions de (H) . Soit $B \in \mathbb{R}$. Notons, f la fonction définie par, pour tout $x > 0$, $f(x) = Bx$. Alors, d'une part,

$$\forall x > 0, \quad xf\left(\frac{1}{x}\right) = x \times \frac{B}{x} = B$$

D'autre part,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = B$$

Donc, f est bien solution de (H) .

Ainsi, les solutions de H sont les fonctions de la forme

$$\boxed{x \mapsto Bx \quad \text{avec } B \text{ une constante réelle}}$$

Exercice 4 – On considère la matrice P suivante.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} . On fera apparaître sur la copie la vérification du résultat obtenu.

Pour déterminer si la matrice P est inversible, on applique l'**algorithme du pivot de Gauss**.

a) Opérations sur P

b) Opérations sur I_3

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_3 + 2L_1) \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_2 + L_3) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Après transformations élémentaires, la matrice qui apparaît est triangulaire supérieure avec tous ses coefficients diagonaux non nuls. La matrice P est donc inversible.
Pour déterminer son inverse, on poursuit l'algorithme.

$$\begin{array}{l} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_3) \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice P est donc inversible et son inverse est donné par

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

✚ Vérification.

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \checkmark$$

2. On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x & & - z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & & & = & -1 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Donner l'interprétation matricielle de ce système linéaire.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On peut remarquer directement que

$$\begin{cases} x & - & z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & & & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \Leftrightarrow PX = B$$

avec P la matrice définie au début de l'énoncé,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) En déduire que ce système linéaire admet une unique solution que l'on déterminera.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme P est inversible (cf Question 1), on peut résoudre directement le système $PX = B$ de la manière suivante :

$$PX = B \Leftrightarrow X = P^{-1}B$$

Ainsi, le système $PX = B$ admet une unique solution donnée par (en reprenant le calcul de P^{-1} de la question 1) :

$$X = P^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

3. On considère maintenant la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $T = P^{-1}AP$. On doit obtenir une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$$

En effectuant les différents produits matriciels, on obtient,

$$\begin{aligned} \boxed{T} &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(b) Calculer T^2 et T^3 .

En effectuant les calculs matriciels, on trouve

$$T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}, T^n$. On pourra commencer par énoncer une conjecture grâce à aux calculs de la question précédente, puis on pourra démontrer cette conjecture par récurrence.

Grâce à la question précédente, on conjecture que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons **par récurrence** que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) : \left\langle T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{est vraie}$$

- *Initialisation.* Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. D'une part, par convention,

$$T^0 = I_3$$

D'autre part,

$$\begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Donc, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, on suppose que

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$T^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a,

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n \times T \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times T \quad \text{en utilisant l'hyp de rec} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{grâce à la Question 3a} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

Tout d'abord, on peut remarquer que

$$\begin{aligned} T &= P^{-1}AP \\ \text{donc } PT &= AP \\ \text{donc } PTP^{-1} &= A \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$A = PTP^{-1}$$

Raisonnons ensuite par **récurrence**. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$: " $A^k = PT^kP^{-1}$ "

- *Initialisation.* Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

D'une part, $A^0 = I_3$ (par convention).

D'autre part, $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.*

Supposons que la propriété $\mathcal{P}(k)$ soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire supposons que

$$A^k = PT^kP^{-1}$$

Montrons que la propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que

$$A^{k+1} = PT^{k+1}P^{-1}$$

On a

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \times M \\ &= PT^kP^{-1}M && \text{par hyp de récurrence} \\ &= PT^kP^{-1}PTP^{-1} && \text{cf Remarque au début de la question} \\ &= PT^kDTP^{-1} \\ &= PT^{k+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, on a montré que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PT^kP^{-1}$$

- (e) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n . On demande de calculer explicitement ses neuf coefficients.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$\begin{aligned}
 \boxed{A^n} &= PT^nP^{-1} \quad \text{d'après la question 3d} \\
 &= P \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times P^{-1} \quad \text{d'après la question 3c} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en utilisant l'énoncé et la question 1} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 2^n & 2^n \\ 2 & n+2 & n+1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \boxed{\begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & n + 3 - 2^{n+1} & n + 2 - 2^{n+1} \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 2 - n & 2^{n+1} - 1 - n \end{pmatrix}}
 \end{aligned}$$

4. On considère trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par, $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $w_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = -2u_n - w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

On pose également,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

(a) Que vaut X_0 ? Que vaut X_1 ?

D'après l'énoncé, on a,

$$\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Puis, en utilisant les relations de récurrence, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_1 = 2u_0 + v_0 + w_0 = 1 \\ v_1 = -2u_0 - w_0 = -1 \\ w_1 = 2u_0 + v_0 + 2w_0 = 2 \end{cases}$$

d'où

$$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

(b) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la relation de récurrence, on a

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n + v_n + w_n \\ -2u_n - w_n \\ 2u_n + v_n + 2w_n \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = AX_n$$

où A est la matrice de l'énoncé, définie à la question 3.

(c) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$$

Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \ll X_n = A^n X_0 \gg$$

est vraie.

- *Initialisation* : Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$X_0 = A^0 X_0$$

Par convention

$$A^0 X_0 = I_3 \times X_0 = X_0$$

Donc la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$X_n = A^n X_0$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$X_{n+1} = A^{n+1} X_0$$

On a,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n && \text{d'après la Question 4b} \\ &= AA^n X_0 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : Donc, par principe de récurrence, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0}$$

(d) En déduire l'expression explicite des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 \quad \text{cf Question précédente} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & n + 3 - 2^{n+1} & n + 2 - 2^{n+1} \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 2 - n & 2^{n+1} - 1 - n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{cf Question 3e} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n - 1 \\ n + 2 - 2^{n+1} \\ 2^{n+1} - 1 - n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or, par construction,

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, par identification, on obtient,

$$\boxed{u_n = 2^n - 1}$$

$$\boxed{v_n = n + 2 - 2^{n+1}}$$

$$\boxed{w_n = 2^{n+1} - 1 - n}$$

Exercice 5 – Soit $f : x \mapsto x - \ln(x)$

Partie 1. Étude de f .

1. Quel est le domaine de définition de f ?

La fonction $x \mapsto x$ est définie sur \mathbb{R} . La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$. Ainsi, le domaine de définition de f est

$$\boxed{]0, +\infty[}$$

2. Donner le tableau de variations complet de f . On admet que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

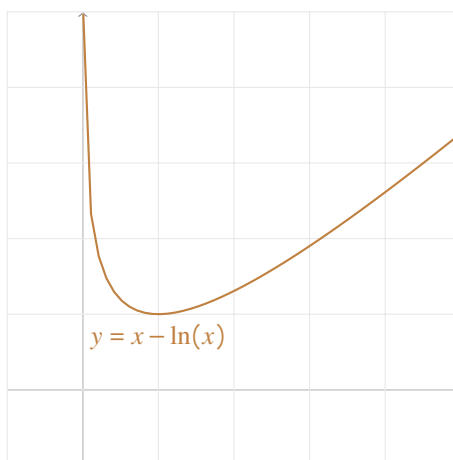
La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Ainsi, on peut en déduire le tableau de signe de f' puis la tableau de variations de f de la manière suivante.

x	0	1	$+\infty$
$x-1$		-	0
x	0	+	+
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

3. Tracer l'allure représentative de la courbe de la fonction f .



4. La fonction f est-elle majorée ? minorée ?

La fonction f est minorée par 1. La fonction f n'est pas majorée par exemple car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie 2. Étude d'une suite implicite.

5. Démontrer que la fonction f est bijective de $]1, +\infty[$ vers un intervalle à déterminer.

On sait que

- L'ensemble $]1, +\infty[$ est un intervalle.
- La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$.
- La fonction f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ (cf Question 2).

Donc, d'après le **théorème de la bijection**,

la fonction f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$

(car $f(1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$)

6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in]1, +\infty[$ tel que $f(x_n) = n$.

D'après la question précédente, la fonction f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$ donc :

$$\forall y \in]1, +\infty[, \exists ! x \in]1, +\infty[, y = f(x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. En prenant $y = n \in]1, +\infty[$, on obtient

$\exists ! x_n \in]1, +\infty[, x_n = f(n)$

7. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Par construction,

$$f(x_n) = n \quad \text{et} \quad f(x_{n+1}) = n + 1$$

Et donc,

$$f(x_n) \leq f(x_{n+1})$$

Or, la fonction f est croissante sur $]1, +\infty[$ et x_n, x_{n+1} sont dans $]1, +\infty[$, donc nécessairement,

$$x_n \leq x_{n+1}$$

Ainsi, la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

8. En déduire qu'il existe seulement deux comportements possibles (à expliciter) pour la convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.

D'après la question précédente, la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est croissante. Donc, d'après le **théorème de la limite monotone**, seulement deux comportements sont possibles :

- Soit la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est majorée et donc ce cas, elle admet une limite finie.
- Soit la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ n'est pas majorée et dans ce cas, elle diverge vers $+\infty$.

9. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ diverge vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ admet une limite finie que l'on note ℓ . Or, on sait par construction que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) = n$$

Or, par continuité, la suite $(f(x_n))_{n \geq 2}$ tend vers $f(\ell)$, alors que la suite $(n)_{n \geq 2}$ diverge vers $+\infty$. Ceci est absurde par unicité de la limite. Donc, nécessairement, la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ diverge vers $+\infty$.

10. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln(2x) \leq x$.

Montrons que pour tout $x \in]0; +\infty[, \ln(2x) < x$. Posons $g : x \mapsto x - \ln(2x)$. La fonction g est définie et même dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Ainsi, de façon similaire à la question 2, on obtient le tableau de variations suivant.

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$1 - \ln(2)$	$+\infty$

Or $2 < e$ donc $\ln(2) < 1$ et donc $1 - \ln(2) > 0$. D'où,

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad g(x) > 1 - \ln(2) > 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln(2x) < x}$$

11. En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $n \leq x_n \leq 2n$.

Soit $n \geq 2$. On sait que

$$f(n) = n - \ln(n), \quad f(x_n) = n \quad f(2n) = 2n - \ln(2n)$$

Or, comme $\ln(n) \geq 0$ (car $n \neq 1$), on a

$$f(n) \leq f(x_n)$$

De plus, d'après la question précédente, $\ln(2n) \leq n$, donc $-\ln(2n) \geq -n$ et donc $2n - \ln(2n) \geq n$, ainsi,

$$f(x_n) \leq f(2n).$$

Ainsi, on a,

$$f(n) \leq f(x_n) \leq f(2n)$$

Or, la fonction f est croissante sur $]1, +\infty[$ (et n, x_n et $2n$ sont dans $]1, +\infty[$) donc nécessairement,

$$\boxed{n \leq x_n \leq 2n}$$

12. Re-démontrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ diverge vers $+\infty$.

D'après la question précédente,

$$\forall n \geq 2, \quad n \leq x_n \leq 2n$$

En particulier,

$$\forall n \geq 2, \quad x_n \geq n$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc par **minoration**,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty}$$

Partie 3. Étude d'une suite explicite récurrente. On fixe $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = f(u_n)$.

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$. On pourra s'appuyer sur la monotonie de f pour l'hérédité de la récurrence.

Montrons par **récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) \quad "u_n \in [1, 2]"$$

est vraie.

- Initialisation. Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. D'après l'énoncé, $u_0 = 3/2 \in [1, 2]$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité.

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que

$$u_n \in [1, 2]$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$u_{n+1} \in [1, 2]$$

On a,

$$\begin{array}{ll} 1 \leq u_n \leq 2 & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \text{donc } f(1) \leq f(u_n) \leq f(2) & \text{car la fct } f \text{ est croissante sur } [0, 1] \text{ (cf Question 2)} \\ \text{c-a-d } 1 \leq u_{n+1} \leq 2 - \ln(2) & \\ \text{à fortiori } 1 \leq u_{n+1} \leq 2 & \end{array}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1, 2].}$$

14. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et préciser sa monotonie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n) - u_n = -\ln(u_n)$$

Or, d'après la question précédente, $u_n \geq 1$, donc $\ln(u_n) \geq 0$ et donc $-\ln(u_n) \leq 0$. Ainsi, on a démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n) \leq 0$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

15. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie, que l'on note ℓ .

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (cf Question 14) et minorée par 1 (cf Question 13). Donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie.

16. Donner un encadrement sur la valeur de la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on note ℓ . Or, on sait par la question 13 que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 2$$

Donc, en passant à la limite, on obtient que

$$\boxed{1 \leq \ell \leq 2}$$

17. Déterminer la valeur de la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on note ℓ . Or, par construction,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - \ln(u_n)$$

Donc, en passant à la limite, on obtient que

$$\ell = \ell - \ln(\ell)$$

(Cette équation est bien licite car on sait que $\ell > 0$ par la question précédente et donc la quantité $\ln(\ell)$ est bien définie.) Ainsi,

$$\ln(\ell) = 0$$

et donc

$$\ell = 1$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_n = \prod_{k=0}^n u_k = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$$

18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 13, on sait que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad u_k \geq 1$$

Donc, en effectuant le produit de toutes ces inégalités, on obtient,

$$u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n \geq 1 \times 1 \times \cdots \times 1$$

c'est-à-dire

$$\boxed{p_n \geq 1}$$

19. Montrer que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{\prod_{k=0}^{n+1} u_k}{\prod_{k=0}^n u_k} \\ &= \frac{u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n \times u_{n+1}}{u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n} \\ &= u_{n+1} \\ &\geq 1 \quad \text{d'après la Question 13} \end{aligned}$$

(d'après la question précédente, on sait en particulier, que, $p_n \neq 0$, donc la quotient a bien un sens). Or, $p_n \geq 0$ d'après la question précédente, donc on en déduit que

$$p_{n+1} \geq p_n$$

Ainsi, la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \ln(u_k) = u_0 - u_{n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = u_k - \ln(u_k)$$

On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_k) = u_k - u_{k+1}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n \ln(u_k) = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1})$$

On reconnaît une **somme télescopique**. On obtient donc,

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \ln(u_k) = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}}$$

21. En déduire que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut remarquer que, grâce aux propriétés algébriques sur le logarithme,

$$\sum_{k=0}^n \ln(u_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^n u_k\right) = \ln(p_n)$$

Ainsi, en utilisant la question précédente, on obtient

$$\ln(p_n) = u_0 - u_{n+1} = \frac{3}{2} - u_{n+1}$$

Donc, en passant à l'exponentielle, on obtient,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \exp\left(\frac{3}{2} - u_{n+1}\right)$$

Or, d'après la question **17**, on sait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge 1, et donc en tant que suite extraite, la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers 1. On en déduit alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{3}{2} - u_{n+1}\right) = \exp\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \sqrt{e}$$

La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \sqrt{e} .