

DS 5

Samedi 21 mars 2026, de 8h à 12h

Consignes globales :

1. Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
2. Les candidat-e-s sont invité-e-s à **encadrer** dans la mesure du possible leurs résultats.
3. Recopier et compléter la phrase suivante en tout début de copie : «*Si j'étais une fonction, je serais...*»
4. Les **pages** doivent être **numérotées** en indiquant le nombre de pages total (par exemple, 1/12, 2/12, ect.)

Exercice 1 – Questions de cours. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Calculer les limites suivantes. *Détailler les calculs.*

a) $x \mapsto \exp(-x^2) + \ln(x)$ en 0^+ b) $x \mapsto \frac{3x^2+x+1}{x^2-2x+2}$ en $+\infty$

c) $x \mapsto \frac{x+e^{-x}}{\ln(x)+1}$ en $+\infty$ d) $x \mapsto \frac{2x^2+2x-4}{x-1}$ en 1

2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

- (a) La fonction $x \mapsto \cos(x)$ admet-elle une limite en $+\infty$?
 - (b) Donner un encadrement de la fonction f sur $]0, +\infty[$.
 - (c) Conclure quant à la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{8} + \frac{u_n}{4}$$

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 6$.
 - (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - (c) Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Donner la définition d'une fonction continue en un point. Pour illustrer cette définition, faites la représentation graphique d'une fonction continue en 0 et d'une fonction non continue en 0.
 5. Montrer que la fonction $x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ s'annule au moins une fois sur $[-2, -1]$. *On pourra illustrer le raisonnement par un schéma.*
 6. Trouver toutes les racines du polynôme $X^4 + 1$ et le factoriser (dans \mathbb{C}). En déduire sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans \mathbb{R} .

Exercice 2 – Application. Dire, **preuve à l'appui**, si les applications suivantes sont injectives/surjectives/bijectives. Si la fonction est bijective, préciser sa bijection réciproque.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, x^2)$
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, x)$
4. $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto u_5$ *On rappelle que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles indexées par \mathbb{N} .*

Exercice 3 – Étude d'une suite grâce à l'inégalité des accroissements finis. On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par:

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = 2 - \frac{1}{2} \ln(u_n)$$

Partie 1 - Étude de g

- Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

- Justifier que la fonction g est continue sur $]0, +\infty[$.
- Dresser le tableau de variations de g sur $]0, +\infty[$.
- Montrer que la fonction g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
- En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$, que l'on notera α .
- Que vaut $g(\alpha)$ par construction ?
- Justifier que

$$g(e) \leq g(\alpha) \leq g(1)$$

On pourra admettre que $3 - 2e < 0$.

- En déduire que $\alpha \in [1, e]$.

Partie 2 - Étude de f

- Justifier que $f(\alpha) = \alpha$.
- Démontrer que

$$\forall x \in [1, e], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

- En déduire que,

$$\forall a, b \in [1, e], |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|$$

Partie 3 - Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq e.$$

- En déduire que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

- Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}.$$

- Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 4 – Étude d’une famille de polynômes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} = \frac{X^0}{0!} + \frac{X^1}{1!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$$

1. Rappeler quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
2. Préciser l’expression (sans symbole somme) des polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 .
3. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant, le coefficient constant et le degré de P_n .
4. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre possible de racines pour le polynôme P_n . *On ne demande pas ici de déterminer ses racines mais de donner une majoration de son nombre possible de racines.*
5. Déterminer les deux racines complexes de P_2 . En déduire la factorisation de P_2 dans $\mathbb{C}[X]$.
6. Le polynôme P_2 est-il scindé dans $\mathbb{C}[X]$? Irréductible dans $\mathbb{C}[X]$? Scindé dans $\mathbb{R}[X]$? Irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?
7. Calculer P_3' , la dérivée du polynôme P_3 . Que remarquez-vous ?
8. Montrer que P_3 n’admet pas de racine multiple (c’est-à-dire de multiplicité supérieure ou égale à 2). *On pourra raisonner par l’absurde.*
9. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n' en fonction de P_{n-1} . *Justifier.*
10. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre P_n et P_n' . *Justifier.*
11. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n n’admet pas de racine multiple.

Exercice 5 – Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie A. Dans cette partie, on s’intéresse à l’équation différentielle

$$(E) \quad y' - \frac{1}{x(x+1)}y = \frac{1}{x+1}$$

sur l’intervalle \mathbb{R}_+^* .

(A1) Justifier que cette équation différentielle (E) est bien posée, c’est-à-dire que les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{x(x+1)} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{x+1}$$

sont continues sur \mathbb{R}_+^* .

- (A2) Quelle est l’équation différentielle homogène (E_H) associée à (E) ?
- (A3) Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$.
- (A4) En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ sur \mathbb{R}_+^* .
- (A5) En déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle homogène (E_H) associée à (E).
- (A6) Montrer que la restriction de la fonction f (définie en introduction de l’exercice) à \mathbb{R}_+^* est une solution particulière de (E).
- (A7) En déduire l’ensemble des solutions de (E).

Partie B.

- (B1) La fonction f est-elle continue à droite en 0 ?
- (B2) On dira que la fonction f est dérivable à droite en 0 si la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ existe et est finie}$$

La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

- (B3) Soit la fonction $\varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1 + \ln x$.
 - (a) Calculer les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.
 - (b) Dresser le tableau de variations de φ .
 - (c) Montrer qu’il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

- (d) En déduire le tableau de signes de φ .
- (B4) Calculer la dérivée de f sur \mathbb{R}_+^* et l'exprimer en fonction de φ .
- (B5) Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
- (B6) Dresser le tableau de variations de f .

Partie C. Dans cette partie, on cherche à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x \ln x}{x+1} dx$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_k sur \mathbb{R}_+ par :

$$f_k: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^k \ln x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (C1) (a) Étudier la continuité de f_1 sur $[0, 1]$.
- (b) Montrer que, pour tout $k \geq 1$,

$$\forall x \in]0, 1], \quad f'_{k+1}(x) = (k+1)f_k(x) + x^k.$$

On admet que cette relation est également valable en 0.

- (c) Calculer l'intégrale suivante.

$$\int_0^1 f'_{k+1}(x) dx$$

- (d) Grâce à la relation obtenue à la question (C1)b, en déduire, pour tout $k \geq 1$, la valeur de l'intégrale

$$I_k = \int_0^1 f_k(x) dx$$

- (C2) (a) Soit $x \in [0, 1]$, calculer la somme $\sum_{k=1}^n (-1)^k x^k$.
- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| I - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k \right| \leq m \int_0^1 x^n dx$$

où $m = \max_{t \in [0;1]} |f(t)|$.

- (c) *On admet que* $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \frac{\pi^2}{12} - 1$. En déduire la valeur de I .