

COLLES 25 & 26 - Du 27/04 au 01/05 & du 04/05 au 08/05

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours (voir page 2).

Chapitre 25 - Probabilités sur un univers fini

- Vocabulaire de base : univers, issues, évènement (certain, impossible, élémentaire)
- Opérations sur les évènements : union, intersection, complémentaire
- Notion de système complet d'évènement
- Définition d'une probabilité, propriétés élémentaires (formule du crible, probabilité de l'évènement contraire,...)
- Exemple de la probabilité uniforme
- Probabilité conditionnelle
- Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes
- Indépendance de deux évènements, indépendance mutuelle d'une famille d'évènements

Chapitre 26 - Relations de comparaison

- Définition de deux fonctions équivalentes au voisinage d'un point, règles de calcul avec les équivalents, équivalents usuels
- Application des équivalents : trouver une limite, trouver une information (locale) sur le signe de la fonction
- Définition de petit o et grand O , ré-écriture du thm des croissances comparées avec ces notations, règles de calculs
- Lien entre les différentes relations de comparaison
- Adaptation aux cas des suites

Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice de cours seront demandés parmi les suivants. La question de cours sera notée sur cinq points, et de même pour l'exercice de cours, soit un total de **10 points** (sur les 20 au total). Néanmoins, tout énoncé du cours pourra faire l'objet d'une question de cours, à tout moment de la colle.

Un énoncé :

- Donner la formule des probabilités composées (Chap 25 - Proposition 5.5)
- Donner la formule des probabilités totales (Chap 25 - Proposition 5.8)
- Donner la formule de Bayes (Chap 25 - Proposition 5.12)

- Donner la définition de $f \sim_a g$, $f =_a o(g)$ et $f =_a O(g)$ (Chap 26 - Définitions 1.1 et 2.1)
- Donner les équivalents usuels de $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \exp(x) - 1$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 (Chap 26 - Section 1.3)
- Donner le théorème des croissances comparées (écrit avec la notation petit o) (Chap 26 - Proposition 2.3)

Un exercice :

- Un virus touche 1% de la population. Un laboratoire fournit un test pour lequel 98% des malades sont positifs et 96% des personnes saines sont négatives. On note M l'évènement «être malade» et P l'évènement «être détecté positif». Calculer la probabilité qu'une personne soit malade et testée négative. (Chap 25 - Exemple 2.6)
- Chaque soir, un étudiant travaille soit les maths, soit la physique (mais pas les deux...). S'il a travaillé les maths, il travaille à nouveau les maths le lendemain avec probabilité $3/4$. S'il a travaillé la physique, il travaille à nouveau la physique le lendemain avec probabilité $1/2$. On suppose que le premier soir, il travaille les maths. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note M_n l'évènement «l'étudiant a travaillé les maths le n -ième soir» et $p_n = P(M_n)$. Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

(On ne demande pas ici de trouver le terme général de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seulement la relation de récurrence). (Chap 25 - Exemple 5.11)

- Dans un jeu de 32 cartes, montrer que les évènements A «Tirer un roi» et B «Tirer un pique» sont indépendants. (Chap 25 - Exemple 6.2)

- Montrer l'équivalent $\sqrt{x^2+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ (Chap 26 - Exemple 1.9)
- Déterminer la limite éventuelle de $x \mapsto \frac{\ln(1+2x) \arctan(x)}{\sin^2(x)}$ en 0. (Chap 26 - Exemple 1.12)
- Dire si les relations de comparaison suivantes sont vraies ou pas (en justifiant). (Chap 26 - Exemple 2.6)

a) $2x+3 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x)$

b) $2x+3 \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$