DS 5

Samedi 21 mars 2026, de 8h à 12h

Consignes globales :

1. Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
2. Les candidat·e·s sont invité·e·s à **encadrer** dans la mesure du possible leurs résultats.
3. Indiquer sur la page numéro 2 de votre copie si vous préférez les fonctions ou les suites.
4. Les **pages** doivent être **numérotées** en indiquant le nombre de pages total (par exemple, 1/12, 2/12, ect.)

Exercice 1 – Questions de cours. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Calculer les limites suivantes. *Détailler les calculs.*

a) $x \mapsto e^{-x^2} + \ln(x)$ en 0^+

Par continuité de l'exponentielle et par composition,

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-x^2} = e^0 = 1$$

De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Donc, par opérations,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} e^{-x^2} + \ln(x) = -\infty}$$

b) $x \mapsto \frac{3x^2+x+1}{x^2-2x+2}$ en $+\infty$

On peut remarquer les équivalents suivants,

$$3x^2 + x + 1 \sim_{+\infty} 3x^2 \qquad \text{et} \qquad x^2 - 2x + 2 \sim_{+\infty} x^2$$

Donc, par quotient,

$$\frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 2} \sim_{+\infty} 3$$

D'où

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 2} = 3}$$

c) $x \mapsto \frac{x+\mathrm{e}^{-x}}{\ln(x)+1}$ en $+\infty$

On peut remarquer les équivalents suivants,

$$x+\mathrm{e}^{-x} \sim_{+\infty} x \qquad \text{et} \qquad \ln(x)+1 \sim_{+\infty} \ln(x)$$

Donc, par quotient,

$$\frac{x+\mathrm{e}^{-x}}{\ln(x)+1} \sim_{+\infty} \frac{x}{\ln(x)}$$

D'où, par croissances comparées,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\mathrm{e}^{-x}}{\ln(x)+1} = +\infty}$$

d) $x \mapsto \frac{2x^2+2x-4}{x-1}$ en 1

Pour calculer cette limite, on peut commencer par remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad \frac{2x^2+2x-4}{x-1} = \frac{2(x+2)(x-1)}{x-1} = 2(x+2)$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to1} \frac{2x^2+2x-4}{x-1} = 6}$$

2. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

(a) La fonction $x \mapsto \cos(x)$ admet-elle une limite en $+\infty$?

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ n'admet $\boxed{\text{pas de limite en } +\infty}$ car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \cos(2\pi n) = 1 \to 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \cos(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 0 \to 0$$

(b) Donner un encadrement de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

D'après les propriétés du cosinus, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

Donc, comme pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$, on obtient,

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad -\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}}$$

(c) Conclure quant à sa limite en $+\infty$.

D'après la question précédente, on sait que

$$\forall x > 0, \qquad -\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Donc, d'après le **théorème d'encadrement** (ou théorème des gendarmes), la fonction f admet une limite en $+\infty$ et elle vaut

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{8} + \frac{u_n}{4}$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 6$.

Montrons par **récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathbb{P}(n) \qquad "0 \leq u_n \leq 6"$$

est vraie.

- Initialisation. Montrons que $\mathbb{P}(0)$ est vraie. D'après l'énoncé, $u_0 = 1 \in [0,6]$. Donc $\mathbb{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité.

  On suppose que $\mathbb{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire on suppose que
  $$0 \leq u_n \leq 6$$
  Montrons que $\mathbb{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que
  $$0 \leq u_{n+1} \leq 6$$
  D'une part, d'après l'hypothèse de récurrence, on a
  $$0 \leq u_n \leq 6 \qquad \text{donc} \qquad 0 \leq \frac{u_n}{4} \leq \frac{3}{2}$$
  D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence,
  $$\begin{array}{ll} & 0 \leq u_n \leq 6 \\ \text{donc} & 0 \leq u_n^2 \leq 36 \quad \text{car la fct } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } [0,+\infty[\\ \text{donc} & 0 \leq \frac{u_n^2}{8} \leq \frac{9}{2} \end{array}$$
  En combinant les deux inégalités, on obtient,
  $$0 \leq \frac{u_n^2}{8} + \frac{u_n}{4} \leq \frac{3}{2} + \frac{9}{2}$$
  c'est-à-dire
  $$0 \leq u_{n+1} \leq 6$$
  Donc $\mathbb{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion. Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_n \leq 6}$$

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{8} + \frac{u_n}{4} - u_n = \frac{u_n^2}{8} - \frac{3u_n}{4} = \frac{u_n^2 - 6u_n}{8} = \frac{u_n(u_n-6)}{8} \leq 0$$

car $0 \leq u_n \leq 6$. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

(c) Conclure quant à la convergence de la suite.

D'après les questions précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 0) et décroissante. D'après le **théorème de la limite monotone**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie que l'on note $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{8} + \frac{u_n}{4}$$

Donc en passant à la limite, on obtient,

$$\ell = \frac{\ell^2}{8} + \frac{\ell}{4}$$

c'est-à-dire

$$\ell^2 - 6\ell = 0 \iff \ell(\ell - 6) = 0 \iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 6$$

Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $u_0 = 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq u_0 = 1$$

Donc en passant à la limite,

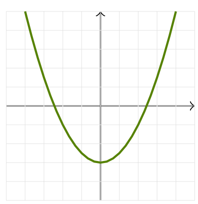
$$\ell = 1$$

d'où $\ell = 0$. La suite $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$

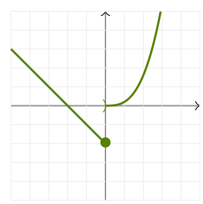
4. Donner la définition d'une fonction continue en un point a. Pour illustrer cette définition, faites la représentation graphique d'une fonction continue en 0 et d'une fonction non continue en 0.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f **est continue à droite en** a lorsque

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)}$$



Représentation d'une fonction *continue en 0*.



Représentation d'une fonction non *continue* en 0.

5. Montrer que la fonction $x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ s'annule au moins une fois sur $[-2, -1]$. *On pourra illustrer le raisonnement par un schéma.*

- La fonction $f : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc sur $[-2, -1]$.
- De plus,

$$f(-2) = -\frac{1}{3} < 0 \qquad \text{et} \qquad f(-1) = \frac{1}{3} > 0$$

Donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**,
la fonction $\boxed{f \text{ s'annule au moins une fois sur } [-2, -1].}$

6. Trouver toutes les racines du polynôme $X^4 + 1$ et le factoriser (dans $\mathbb{C}$). En déduire sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$.

De manière équivalente, il s'agit de trouver les racines de P. Soit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a,

$$\begin{aligned}
P(z) = 0 &\iff z^4 + 1 = 0 \\
&\iff z^4 = -1 \\
&\iff r^4 e^{i4\theta} = e^{i\pi} \\
&\iff \begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta = \pi[2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{\pi}{4}[\dfrac{\pi}{2}] \end{cases} \\
&\iff z = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3\} \\
&\iff z = e^{\frac{i\pi}{4}} \text{ ou } z = e^{\frac{-i\pi}{4}} \text{ ou } z = e^{\frac{3i\pi}{4}} \text{ ou } z = e^{\frac{-3i\pi}{4}}
\end{aligned}$$

Comme le polynôme P est unitaire, il se factorise donc de la manière suivante :

$$\boxed{P = (X - e^{\frac{i\pi}{4}})(X - e^{\frac{-i\pi}{4}})(X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X - e^{\frac{-3i\pi}{4}})}$$

Puis on regroupe les racines complexes conjuguées ensemble pour obtenir la factorisation sur $\mathbb{R}$. D'une part, on a,

$$X - e^{\frac{i\pi}{4}})(X - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = X^2 - 2\cos(\frac{\pi}{4})X + 1 = X^2 - \sqrt{2}X + 1$$

D'autre part, on a,

$$(X - e^{3i\frac{\pi}{4}})(X - e^{\frac{-3i\pi}{4}}) = X^2 - 2\cos(\frac{3\pi}{4})X + 1 = X^2 + \sqrt{2}X + 1$$

On obtient alors,

$$\boxed{P = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)}$$

Il s'agit donc de la décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 – Application. Dire, **preuve à l'appui**, si les applications suivantes sont injectives/surjectives/bijectives. Si la fonction est bijective, préciser sa bijection réciproque.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, x^2)$.

   - Montrons que la fonction f est injective. Soient x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$. Comme $f(x) = f(y)$, on sait que

     $$(x, x^2) = (y, y^2) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} x = y \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

     En particulier, la première ligne donne directement $x = y$. Donc la $\boxed{\text{fonction } f \text{ est injective.}}$
   - Montrons que la fonction f n'est pas surjective. En particulier, montrons que $(0, -1)$ n'admet pas d'antécédent par la fonction f. Supposons par l'absurde que $(0, -1)$ admet un antécédent par f : il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

     $$f(x) = (0, -1)$$

     En particulier, en identifiant la deuxième coordonnée, on obtient $x^2 = -1$. Ce qui est absurde ($x \in \mathbb{R}$). Donc la fonction $\boxed{f \text{ n'est pas surjective.}}$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$.

   - Montrons que la fonction f n'est pas injective. On peut remarquer directment que $f(1,0) = f(0,1) = 1$ alors que $(1,0) \neq (0,1)$. Donc la fonction $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.
   - Montrons que la fonction f est surjective. Soit $z \in \mathbb{R}$. On peut remarquer que

     $$f((0,z)) = z$$

     Ainsi, tout élément de l'espace d'arrivée admet au moins un antécédent par f : la fonction $\boxed{f \text{ est surjective.}}$

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, x)$.

   On peut remarquer que

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(f(x,y)) = (x,y)$$

   Autrement dit,

   $$f \circ f = \mathrm{id}$$

   Donc la fonction $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et sa bijection réciproque est donnée par

   $$\boxed{f^{-1} = f}$$

4. $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto u_5$. *On rappelle que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$.*

   - Montrons que la fonction f n'est pas injective. Considérons les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = (n-5)^2 + 1$$

     Comme $u_5 = v_5$, on peut remarquer que

     $$f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f((v_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

     alors que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont différentes (par exemple $u_2 \neq v_2$). Donc la fonction $\boxed{f \text{ n'est pas injective.}}$

- Montrons que la fonction f est surjective. Soit $z \in \mathbb{R}$. Définissons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{5\}, u_n = 0 \qquad \text{et} \qquad u_5 = z$$

  Alors, par construction
$$f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = z$$
  Ainsi, tout élément de l'espace d'arrivée admet au moins un antécédent par f : la fonction $\boxed{f \text{ est surjective.}}$

Exercice 3 – Étude d'une suite grâce à l'inégalité des accroissements finis. On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par:

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0,+\infty[,\ \ g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n) = 2 - \frac{1}{2}\ln(u_n)$$

Partie 1 - Étude de g

1. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

Par opérations sur les limites, on obtient directement que,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$$

2. Justifier que la fonction g est continue sur $]0,+\infty[$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$ (fonction usuelle) et la fonction $x \mapsto 2 - x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale). Donc, par somme, la fonction g est $\boxed{\text{continue sur }]0,+\infty[}$.

3. Dresser le tableau des variations de g sur $]0,+\infty[$.

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par combinaison linéaire, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x > 0, \qquad g'(x) = -\frac{1}{2x} - 1 < 0$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour g.

x	0		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

4. Montrer que la fonction g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

- $]0,+\infty[$ est un intervalle;
- g est continue sur $]0,+\infty[$;
- g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ d'après la question précédente.

Ainsi, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction $\boxed{g \text{ réalise une bijection de }]0,+\infty[\text{ vers}}$

$$\boxed{J} =]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)[=]-\infty,+\infty[\ \boxed{= \mathbb{R}}$$

5. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$, que l'on notera α.

D'après la question précédente, g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ donc,

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \ \exists! x \in]0,+\infty[,\ \ y = g(x)$$

En particulier, pour $y = 0 \in \mathbb{R}$, on obtient,

$$\exists! x \in]0,+\infty[,\ \ 0 = g(x)$$

$\boxed{\text{L'équation } g(x) = 0 \text{ admet donc une unique solution sur }]0,+\infty[}$, que l'on note α.

6. Que vaut $g(\alpha)$ par construction ?

Par construction, α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{g(\alpha) = 0}$$

7. Justifier que

$$g(\mathrm{e}) \leqslant g(\alpha) \leqslant g(1)$$

On pourra admettre que $3 - 2\mathrm{e} < 0$.

On peut calculer que

$$g(1) = 1$$

et

$$g(\mathrm{e}) = \frac{3}{2} - \mathrm{e} = \frac{3 - 2\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$$

et par construction

$$g(\alpha) = 0$$

Comme $3 - 2\mathrm{e} < 0$, on en déduit que

$$\boxed{g(\mathrm{e}) \leqslant g(\alpha) \leqslant g(1)}$$

8. En déduire que $\alpha \in [1, \mathrm{e}]$.

D'après la question précédente, on sait

$$g(\mathrm{e}) \leqslant g(\alpha) \leqslant g(1)$$

Or, la fonction g est décroissante sur $]0, +\infty[$ (cf question 2), donc

$$\mathrm{e} \geqslant \alpha \geqslant 1$$

c'est-à-dire $\boxed{\alpha \in [1, \mathrm{e}].}$

Partie 2 - Étude de f

9. Justifier que $f(\alpha) = \alpha$.

Par construction, $g(\alpha) = 0$ (cf Questions 4 et 5). Or, $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha$. Donc,

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha}$$

10. Démontrer que

$$\forall x \in [1, \mathrm{e}], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = -\frac{1}{2x}$$

Donc,

$$\forall x > 0, \qquad |f'(x)| = \frac{1}{2x}$$

Soit $x \in [1, \mathrm{e}]$. On a,

$$\begin{array}{lll} & x \geqslant 1 & \\ \text{donc} & 2x \geqslant 2 & \\ \text{donc} & \frac{1}{2x} \leqslant \frac{1}{2} & \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ décroissante sur }]0, +\infty[\end{array}$$

Ainsi, on a montré que,

$$\boxed{\forall x \in [1, \mathrm{e}], \quad |f'(x)| \leq \tfrac{1}{2}.}$$

11. En déduire, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que,

$$\forall a,b \in [1,\mathrm{e}], \qquad |f(b)-f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|$$

On sait que

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donc à fortiori sur $[1,\mathrm{e}]$.
- D'après la question précédente,

$$\exists k = \frac{1}{2} \text{ tel que } \forall x \in [1,\mathrm{e}], \ \ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Donc, par inégalité des accroissements finis, on obtient que,

$$\boxed{\forall a,b \in [1,\mathrm{e}], \qquad |f(b)-f(a)| \leqslant \tfrac{1}{2}|b-a|}$$

Partie 3 - Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

12. Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq \mathrm{e}.$$

Démontrons par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathcal{P}(n) \text{ « } 1 \leq u_n \leq \mathrm{e} \text{ » est vraie}$$

- Initialisation. Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. D'après l'énoncé, $u_0 = 1 \in [1,\mathrm{e}]$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$1 \leq u_n \leq \mathrm{e}$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que

$$1 \leq u_{n+1} \leq \mathrm{e}$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que

$$\begin{array}{lll} & 1 \leq u_n \leq \mathrm{e} & \\ \text{donc} & 0 \leq \ln(u_n) \leq 1 & \text{car } x \mapsto \ln(x) \text{ croissante sur }]0,+\infty[\\ \text{donc} & 0 \geq -\frac{1}{2}\ln(u_n) \geq -\frac{1}{2} & \\ \text{donc} & 2 \geq 2-\frac{1}{2}\ln(u_n) \geq 2-\frac{1}{2} & \\ \text{donc} & \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2 & \\ \text{donc à fortiori} & 1 \leq u_{n+1} \leq \mathrm{e} & \end{array}$$

Donc, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion. D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 \leq u_n \leq \mathrm{e}}$$

13. À l'aide de la question 11, en déduire que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|.$$

D'après la question **11**, on sait que

$$\forall a,b \in [1,\mathrm{e}], \qquad |f(b)-f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $a = \alpha \in [1,\mathrm{e}]$ (cf Question 7) et $b = u_n \in [1,\mathrm{e}]$ (cf Question 11), on obtient,

$$|f(u_n)-f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$

Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ par définition et $f(\alpha) = \alpha$ par construction (cf Question 8), on obtient

$$\boxed{|u_{n+1}-\alpha| \leq \tfrac{1}{2}|u_n-\alpha|.}$$

14. Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}.$$

Montrons par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante est vraie

$$\mathcal{P}(n) : \text{ « } |u_n - \alpha| \leqslant \frac{e-1}{2^n} \text{ ».}$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_0 - \alpha| \leqslant \frac{e-1}{2^0} = e - 1$$

D'après l'énoncé, $u_0 = 1$ donc $|u_0 - \alpha| = e - 1$ (car $e > 1$) Et donc, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{e-1}{2^n}$$

On veut montrer que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{e-1}{2^{n+1}}$$

On a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leqslant \frac{1}{2} \times |u_n - \alpha| && \text{d'après la question précédente} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{e-1}{2^n} && \text{d'après l'H-R} \\ &\leqslant \frac{e-1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{e-1}{2^n}}$$

15. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{e-1}{2^n}$$

Or, par propriété sur les suites géométriques, on a

$$\lim_{n\to+\infty} (e-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \text{car} \qquad -1 < \frac{1}{2} < 1.$$

Donc, par théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$$

Exercice 4 – Étude d'une famille de polynômes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} = \frac{X^0}{0!} + \frac{X^1}{1!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$$

1. Rappeler quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

   - $\boxed{\text{Les polynômes irréductibles de } \mathbb{C}[X]}$ sont exactement $\boxed{\text{les polynômes de degré 1.}}$
   - $\boxed{\text{Les polynômes irréductibles de } \mathbb{R}[X]}$ sont exactement les $\boxed{\text{polynômes de degré 1}}$ et les $\boxed{\text{polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.}}$

2. Préciser l'expression (sans symbole somme) des polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.

   On a,
   $$\boxed{P_0} = \sum_{k=0}^{0} \frac{X^k}{k!} = \frac{X^0}{0!} \boxed{= 1}$$
   Puis,
   $$\boxed{P_1} = \sum_{k=0}^{1} \frac{X^k}{k!} = \frac{X^0}{0!} + \frac{X^1}{1!} \boxed{= 1 + X}$$
   Et
   $$\boxed{P_2} = \sum_{k=0}^{2} \frac{X^k}{k!} = \frac{X^0}{0!} + \frac{X^1}{1!} + \frac{X^2}{2!} \boxed{= 1 + X + \frac{X^2}{2}}$$
   Et enfin, de même,
   $$\boxed{P_3 = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6}}$$

3. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant, le coefficient constant et le degré de P_n.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\frac{1}{n!} \neq 0$,
   - $\boxed{\text{le degré de } P_n \text{ est } n}$
   - $\boxed{\text{le coefficient dominant de } P_n \text{ est } \frac{1}{n!}}$
   - et $\boxed{\text{le coefficient constant de } P_n \text{ est } 1}$

4. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre possible de racines pour le polynôme P_n ? *On ne demande pas ici de déterminer ses racines mais de donner une majoration de son nombre possible de racines.*

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme P_n est de degré n, il admet $\boxed{\text{au plus } n \text{ racines distinctes.}}$

5. Déterminer les deux racines complexes de P_2. En déduire la factorisation de P_2 dans $\mathbb{C}[X]$.

   On a déjà calculé que
   $$P_2 = 1 + X + \frac{X^2}{2}$$
   Comme P_2 est un polynôme de degré 2, on peut étudier ses racines grâce au discriminant qui vaut ici
   $$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = -1 < 0$$
   Ainsi, P_2 admet deux racines complexes données par
   $$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{1}}{2 \times \frac{1}{2}} = \boxed{-1 + i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{1}}{2 \times \frac{1}{2}} = \boxed{-1 - i}$$

Et le polynôme P_2 se factorise (dans $\mathbb{C}[X]$) de la manière suivante :

$$\boxed{P_2} = \frac{1}{2}(X-(-1+i))(X-(-1-i) \boxed{= \frac{1}{2}(X+1-i)(X+1+i)}$$

6. Le polynôme P_2 est-il scindé dans $\mathbb{C}[X]$? Irréductible dans $\mathbb{C}[X]$? Scindé dans $\mathbb{R}[X]$? Irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?

D'après la question précédente,

$$P_2 = \frac{1}{2}(X+1-i)(X+1+i)$$

le polynôme P_2 est $\boxed{\text{scindé sur } \mathbb{C}[X].}$ Le polynôme P_2 n'est pas un polynôme de degré 1, il n'est $\boxed{\text{pas irréductible dans } \mathbb{C}[X].}$ Le polynôme P_2 est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif : il est donc $\boxed{\text{irréductible dans } \mathbb{R}[X]}$ mais $\boxed{\text{pas scindé sur } \mathbb{R}[X].}$

7. Calculer P_3'. Que remarquez-vous ?

On a déjà calculé que

$$P_3 = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6}$$

Donc, en dérivant,

$$\boxed{P_3' = 1 + X + \frac{X^2}{2} = P_2}$$

8. Montrer que P_3 n'admet pas de racine multiple (i.e. de multiplicité supérieure ou égale à 2). *On pourra raisonner par l'absurde.*

Supposons par l'absurde que P_3 admet une racine, notée α, de multiplicité supérieure ou égale à 2. Alors

$$P_3(\alpha) = P_3'(\alpha) = 0$$

Alors,

$$\begin{cases} 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{6} = 0 \\ 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\alpha^3}{6} = 0 \\ 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2} = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ 1 = 0 \text{ impossible !} \end{cases}$$

Donc, $\boxed{P_3 \text{ n'admet pas de racine multiple.}}$

9. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n' en fonction de P_{n-1}.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

Donc, en dérivant (par linéarité), on a,

$$P_n' = \sum_{k=1}^{n} k\frac{X^{k-1}}{k!}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k! = k \times (k-1)!$. Donc,

$$P_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}$$

En effectuant le changement d'indice $\ell = k - 1$, on obtient,

$$P_n' = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{X^\ell}{\ell!}$$

soit

$$\boxed{P_n' = P_{n-1}}$$

10. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre P_n et P_n'.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En reprenant le calcul de la question précédente, on a,

$$P_n' = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{X^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{X^\ell}{\ell!} - \frac{X^n}{n!}$$

D'où

$$\boxed{P_n' = P_n - \frac{X^n}{n!}}$$

11. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n n'admet que des racines simples.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons par l'absurde que P_n admet une racine, notée α, de multiplicité supérieure ou égale à 2. Alors

$$P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$$

Or,

$$P_n' = P_n - \frac{X^n}{n!}$$

Donc en évaluant cette relation en α, on obtient,

$$0 = 0 - \frac{\alpha^n}{n!}$$

c'est-à-dire $\alpha = 0$. Or

$$P_n(0) = 1 \neq 0$$

Ceci est absurde. Donc $\boxed{P_n \text{ n'admet pas de racine multiplie : il n'admet que des racines simples.}}$

Exercice 5 – Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x\ln x}{x+1} & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases} \end{array}$$

Partie A. Dans cette question, on s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - \frac{1}{x(x+1)}y = \frac{1}{x+1}$$

sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

(A1) Justifier que cette équation différentielle (E) est bien posée, c'est-à-dire que les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{x(x+1)} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{1}{x+1}$$

sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto x(x+1)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car fonction polynomiale) donc sur $]0,+\infty[$ **et** ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ (car la fonction s'annule en 0 et -1) donc, par passage au quotient, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ est continue sur $]0,+\infty[$. On justifie de même la continuité de la seconde fonction.

(A2) Quelle est l'équation différentielle homogène (E_H) associée à (E) ?

L'équation différentielle homogène (E_H) associée à (E) est

$$(E_H) \qquad y' - \frac{1}{x(x+1)}y = 0$$

(A3) Effectuer la décomposition en éléments simples de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$.

On cherche a et b deux réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

En multipliant cette égalité par x et en l'évaluant en $x=0$, on trouve $a=1$. De façon similaire, on trouve $b=-1$. D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}$$

(A4) En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après la question précédente, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}$$

Donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction

$$x \mapsto \ln(|x|) - \ln(|x+1|)$$

autrement dit

$$x \mapsto \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

en utilisant les propriétés algébriques du logarithme et car pour tout $x>0$, $x>0$ et $x+1>0$.

(A5) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (E_H) associée à (E).

L'équation différentielle homogène (E_H) associée à (E) est

$$(E_H) \qquad y' - \frac{1}{x(x+1)} y = 0$$

C'est une équation différentielle homogène linéaire d'ordre 1. Les solutions sont de la forme

$$x \mapsto \lambda \exp(-A(x))$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et A une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ sur $]0, +\infty[$. En utilisant le calcul de primitive effectué à la question précédente, on trouve que les solutions de (E_H) sont de la forme

$$x \mapsto \lambda \, \mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda \, \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)} = \frac{\lambda x}{x+1} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(A6) Montrer que la restriction de la fonction f (définie en introduction) à $\mathbb{R}_+^*$ est une solution particulière de (E).

Vérifions que $y_P : x \mapsto \frac{x \ln x}{x+1}$ est solution de (E) (c'est la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$). D'abord, y_P est dérivable deux fois. De plus, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} y_P'(x) - \frac{1}{x(x+1)} y_P(x) &= \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)} \frac{x \ln x}{x+1} \\ &= \frac{x + 1 + \ln x}{(x+1)^2} - \frac{\ln x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{\ln x}{(x+1)^2} - \frac{\ln x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

ce qui montre que y_P est solution particulière de (E).

(A7) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Grâce au théorème de structure (et aux questions précédentes), les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont données par :

$$\boxed{x \mapsto \frac{x \ln x}{x+1} + \frac{\lambda x}{x+1} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Partie B.

(B1) La fonction f est-elle continue à droite en 0 ?

Par croissances comparées, $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$. Puis, par opérations sur les limites, on obtient que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln(x)}{x+1} = 0$$

De plus,

$$f(0) = 0$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

et la fonction f est continue à droite en 0.

(B2) On dit qu'une fonction f est dérivable à droite en 0 si la limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ existe et est finie}$$

La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

On a,

$$\forall x > 0, \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(x)}{x+1}$$

Donc, par opérations sur les limites,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

et donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0

(B3) Soit la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + 1 + \ln x$.

(a) Calculer les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.

Par somme, on obtient directement que

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

(b) Dresser le tableau de variations de φ.

La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \qquad \varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

D'où le tableau de variations suivant.

x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$+$	
φ	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

- L'ensemble $]0, 1]$ est un intervalle.
- La fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$ (par somme de fonctions usuelles) et donc sur $]0, 1]$.
- D'après la question précédente, la fonction φ est strictement croissante sur $]0, 1]$.

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction φ réalise une bijection de $]0, 1]$ vers $\varphi(]0, 1]) =]-\infty, 2]$:

$$\forall y \in]-\infty, 2], \exists! x \in]0, 1], y = \varphi(x)$$

En particulier, en prenant $y = 0 \in]-\infty, 2]$,

$$\exists! x \in]0, 1], 0 = \varphi(\alpha)$$

(d) En déduire le tableau de signes de φ sur $]0, +\infty]$.

La fonction φ est strictement croissante sur $]0, +\infty]$ et s'annule en α, on en déduit le tableau de signe suivant

x	0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(B4) Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'exprimer en fonction de φ.

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x>0, \quad f'(x) = \frac{(\ln x+1)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2} = \frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2} = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2}.$$

(B5) Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

On a déjà calculé la limite en 0^+ précedemment

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x)}{x+1} = 0$$

Pour calculer la limite en $+\infty$, on peut commencer par remarquer que

$$\forall x>0, \qquad f(x) = \frac{x\ln(x)}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{\ln(x)}{1+\frac{1}{x}}$$

Puis par opérations élémentaires, on trouve que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

(B6) Dresser le tableau de variations de f.

À l'aide de plusieurs questions précédents, on en déduit que

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C. Dans cette partie, on cherche à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x\ln x}{x+1}\mathrm{d}x$$

Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_k sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_k\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^k\ln x & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases} \end{array}$$

(C1) (a) Étudier la continuité de f_1 sur $[0,1]$.

Par produit d'un polynôme et de ln, f_1 est continue sur $]0,+\infty]$ et donc sur $]0,1]$. De plus, par croissances comparées,

$$\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

et

$$f_1(0) = 0$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = f_1(0)$$

Donc f_1 est continue (à droite) en 0. Finalement, f_1 est continue sur $]0,1]$.

(b) Montrer que, pour tout $k \geq 1$,

$$\forall x \in]0,1], \quad f'_{k+1}(x) = (k+1)f_k(x) + x^k.$$

On admet que cette relation est également valable en 0.

Soit $k \geq 1$. On a, pour tout $x > 0$,

$$f'_{k+1}(x) = (k+1)x^k \ln x + x^{k+1}\frac{1}{x} \boxed{= (k+1)f_k(x) + x^k.}$$

(c) Calculer l'intégrale suivante.

$$\int_0^1 f'_{k+1}(x)\mathrm{d}x$$

La fonction f_{k+1} est une primitive de f'_{k+1} sur $]0,1]$ donc :

$$\int_0^1 f'_{k+1}(x)\mathrm{d}x = [f_{k+1}(x)]_{x=0}^1 = 0 - 0 = 0$$

(d) Grâce à la relation obtenue à la question (C1)b, en déduire, pour tout $k \geq 1$, la valeur de l'intégrale

$$I_k = \int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x$$

Soit $k \geq 1$. À la question (C1)b, on a montré que

$$\forall x \in [0,1], \quad f'_{k+1}(x) = (k+1)f_k(x) + x^k.$$

Donc en intégrant sur $]0,1]$, on obtient que

$$\int_0^1 f'_{k+1}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (k+1)f_k(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 x^k \mathrm{d}x$$

En calculant les intégrales, on obtient

$$0 = (k+1)I_k = \int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{k+1}$$

d'où

$$I_k = \int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{(k+1)^2}$$

(C2) (a) Soit $x \in [0,1]$, calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k$.

Soit $x \in [0,1]$. En reconnaissant une somme géométrique, on obtient,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k} &= \sum_{k=1}^{n} (-x)^k \\
&= -x\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} \\
&= -x\frac{1-(-1)^n x^n}{1+x} \\
&= \boxed{-\frac{x}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}}
\end{aligned}$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k \right| \leq m \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$$

où $m = \max_{t \in [0;1]} |f(t)|$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, par définition de I et des I_k, on a :

$$\begin{aligned}
\left| I - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k \right| &= \left| \int_0^1 \frac{x \ln x}{x+1} \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 x^k \ln x \,\mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{x \ln x}{x+1} \mathrm{d}x + \int_0^1 \ln x \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k \,\mathrm{d}x \right| && \text{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= \left| \int_0^1 \frac{x \ln x}{x+1} \mathrm{d}x + \int_0^1 \ln x \left(-\frac{x}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \right) \mathrm{d}x \right| && \text{(C2a)} \\
&= \left| \int_0^1 \frac{x \ln x}{x+1} \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x \ln x}{x+1} \mathrm{d}x + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1} \ln x}{x+1} \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1} \ln x}{x+1} \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int_0^1 x^n f(x) \,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_0^1 x^n |f(x)| \,\mathrm{d}x && \text{(car } x \geq 0\text{)} \\
&\leq m \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(c) *On admet que* $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \frac{\pi^2}{12} - 1$. En déduire la valeur de I.

D'après la question précédente (en finissant le calcul), on a,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| I - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k \right| \leq \frac{m}{n+1}$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{m}{n+1} = 0$, par **théorème d'encadrement**, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = I$$

Or d'après l'énoncé,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \frac{\pi^2}{12} - 1$$

Donc par unicité de la limite,

$$I = \frac{\pi^2}{12} - 1$$