

28. Développements limités

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point et a un point de \bar{I} (a est dans I ou une extrémité de I , éventuellement $\pm\infty$).

1 Introduction

L'objectif est d'**approcher** les fonctions **par des fonctions polynomiales** au voisinage d'un point, généralement en 0.

Par exemple, nous avons vu que $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, ce qui peut se traduire par

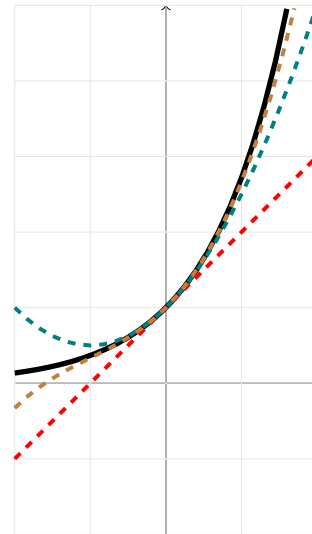
$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$$

On approxime alors f au voisinage de 0 par la fonction $x \mapsto 1 + x$, polynomiale de degré 1. Graphiquement, cela signifie que la droite $y = 1 + x$ (la tangente à la courbe représentative de \exp) est la droite la plus proche de la courbe au voisinage de 0.

Mais on peut obtenir des approximations de plus en plus précises en poussant l'ordre du développement limité. Nous avons également

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Cela signifie que la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 la plus proche de l'exponentielle au voisinage de 0 est la fonction polynomiale $x \mapsto 1 + x + x^2/2$. La notion de développement limité est l'extension naturelle de la notion de tangente à une courbe en un point.



Exemple 1.1 Considérons $f : x \mapsto 2 - x + \cos(x^2)x^2 + x^3$. Montrer que

a) $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + o(1)$ (DL à l'ordre 0)

b) $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 - x + o(x)$ (DL à l'ordre 1)

c) $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 - x + x^2 + o(x^2)$ (DL à l'ordre 2)

2 Développements limités en un point

2.1 Définition

Définition 2.1 Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en $0 \in \bar{I}$** s'il existe des nombres réels a_0, \dots, a_n tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

- Plus généralement : On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en $a \in \bar{I}$** s'il existe des nombres réels a_0, \dots, a_n tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

En effectuant le changement de variable $h = x - a$, on peut écrire le développement limité d'une fonction f en un point a comme :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_nh^n + o(h^n).$$

Autrement dit, l'existence d'un développement limité de f en a à l'ordre n est équivalent à l'existence d'un développement limité de $h \longmapsto f(a+h)$ en 0 , avec les mêmes coefficients.

Exemple 2.2 On considère la fonction $f : x \mapsto 4 - 3x + 5x^2 + x^2 \sin(x) + x^3 e^x$. Donner le DL à l'ordre 0, 1 et 2 en 0 de la fonction f .

Exemple 2.3 Montrer que $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ admet un DL en 0 d'ordre n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si une fonction f admet un développement limité en 0 l'ordre n , alors la fonction $x \mapsto f(-x)$ admet aussi un développement limité en 0 à l'ordre n . Il s'obtient en remplaçant la variable x par son opposée $-x$ dans le DL initial.

Exemple 2.4 Montrer que $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ admet un DL en 0 d'ordre n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Tout développement limité en a se ramène en un développement limité en 0 par le changement de variables

$$h = x - a \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Exemple 2.5 Déterminer le $DL_n(1)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Pour obtenir un équivalent à partir d'un DL, il suffit de factoriser par le terme dominant.

Exemple 2.6 On donne le DL à l'ordre 5 en 0 suivant :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Donner un équivalent en 0 de la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$.

2.2 Propriétés des équivalents

Proposition 2.7 — Troncature d'un DL (Qui peut le plus peut le moins). Soient $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction qui admet un développement limité en a à l'ordre n :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Alors pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, f admet un développement limité en a à l'ordre p , obtenue en tronquant le DL à l'ordre p :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p).$$

Démonstration. Il suffit de constater que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_p(x-a)^p + \underbrace{a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)}_{=o((x-a)^p)}.$$

■

Proposition 2.8 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f admet un développement limité d'ordre n en a alors ce développement limité est unique.

Proposition 2.9 — DL et parité. On suppose que I est symétrique par rapport à 0 et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n .

- Si f est paire alors son DL ne contient que des termes de puissances paires.
- Si f est impaire alors son DL ne contient que des termes de puissances impaires.

3 Comment trouver un DL ?

3.1 Grâce à une formule...

Théorème 3.1 — Formule de Taylor-Young. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est de classe \mathcal{C}^n sur I alors f admet un développement limité en a à l'ordre n . Plus précisément,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \\ &\underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n). \end{aligned}$$

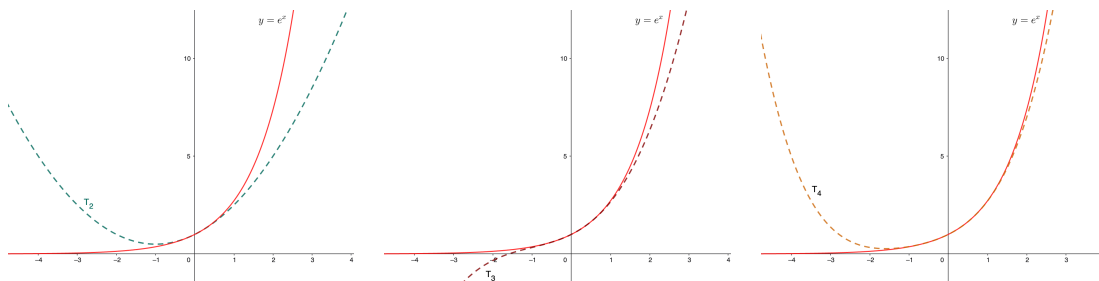
Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction de \mathcal{C}^n sur I alors on appelle polynôme de Taylor de f en a de degré n , la fonction polynomiale

$$T_n : x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

de sorte que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} T_n(x) + o((x-a)^n)$$

Cette formule est asymptotique et gagne en précision lorsque l'on augmente le degré du polynôme. On compare ci-dessous le graphe de la fonction exponentielle et de ses polynômes de Taylor en 0 de degré 2, 3 et 4.



En trait continu, le graphe de \exp et en pointillé, le graphe de T_2 .

En trait continu, le graphe de \exp et en pointillé, le graphe de T_3 .

En trait continu, le graphe de \exp et en pointillé, le graphe de T_4 .

La formule de Taylor-Young permet de trouver le DL n'importe quelle fonction assez régulière... à condition de connaître ses dérivées successives, ce qui peut être un calcul fastidieux ! Nous verrons bientôt comment manipuler des DL pour en trouver de nouveaux sans passer par cette formule.

Exemple 3.2 Déterminons le développement limité en 0 à tout ordre de la fonction exponentielle.

Exemple 3.3 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Déterminons le DL en 0 à l'ordre n de $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Exemple 3.4 À partir du tableau (cf page suivante), donner

a) le DL en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

b) le DL en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto \exp(x)$

c) le DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \cos(x)$

d) le DL en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^3}$

Grâce à cette formule, on peut en déduire tous les développements limités classiques suivants.

Fonction $f(x)$	DL en 0 (symbole \sum)	DL en 0 (forme visuelle)
e^x	$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$	$1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$	$1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	$1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$	$x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\text{ch}(x)$	$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	$1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\text{sh}(x)$	$\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$	$x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$(1+x)^\alpha, \alpha \notin \mathbb{N}$	$1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + o(x^n)$
$\arctan(x)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$	$x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$\tan(x)$	Difficile et hors programme	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

3.2 Par opérations sur des DL connus

Substitution

Dans un développement limité en 0, on peut remplacer x par toute expression dépendant de x et qui tend vers 0, par exemple $-x, x^2, \sqrt{x}, \dots$

Exemple 3.5

- a) Donner le DL en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto \exp(x^2)$ b) Donner le DL en 0 à l'ordre 6 de $x \mapsto \ln(1+x^3)$

Primitivation

Proposition 3.6 — Primitivation de DL. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a \in I$. On suppose que f' admet un développement limité en a à l'ordre n :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Alors f admet un développement limité en a à l'ordre $n+1$ donné par :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + a_0(x-a) + a_1 \frac{(x-a)^2}{2} + \dots + a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

On peut donc toujours primitiver terme à terme le développement limité d'une dérivée. Ne pas oublier la constante d'intégration !

Exemple 3.7 Trouver le DL à tout ordre de la fonction $f : x \mapsto -\ln(1-x)$.

Exemple 3.8 Trouver le DL à tout ordre de la fonction $f : x \mapsto \arctan(x)$.

Combinaison linéaire

Proposition 3.9 Soient f et g deux fonctions admettant des $DL_n(a)$. Alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(a)$.

On rappelle que

a) $o(x^2) + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$

b) $o(x^4) + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$

c) et plus généralement, si $p \leq q$ alors $o(x^p) + o(x^q) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^p)$

Ainsi, dans une somme, on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal au plus petit exposant des petits o . On retiendra que lorsqu'on somme deux DL, on obtiendra un DL de l'ordre du moins bon des deux. Ainsi, pour obtenir le DL à l'ordre n d'une combinaison linéaire, on développe chaque fonction au même ordre n et on ordonne les puissances.

Exemple 3.10 Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto 1 + 2 \cos(x) - \ln(1+x)$.

Produit

Proposition 3.11 Soient f et g deux fonctions admettant des $DL_n(a)$. Alors la fonction $f \times g$ admet un $DL_n(a)$.

On rappelle que

a) $xo(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \quad$

b) $2o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} \quad$

c) $o(x^2)o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \quad$

d) $(o(x^2))^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} \quad$

Pour trouver un DL à l'ordre n d'un produit, on peut développer chacun des termes à l'ordre n , effectuer le produit et ne garder que les termes utiles au développement souhaité.

Exemple 3.12 Calculer le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto e^x \cos(x)$.

Parfois, pour obtenir un développement à l'ordre n , il n'est pas nécessaire de développer chacun des termes à l'ordre n . Plus précisément, pour trouver le DL en a à l'ordre n de $f \times g$, on peut parfois tronquer les DL de f et g à un ordre inférieur :

- ❶ Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \lambda x^p$ avec $\lambda \neq 0$ (i.e. le DL en a à l'ordre n de f commence par λx^p), on peut utiliser un DL de g à l'ordre $n - q$
- ❷ Et si $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \mu x^q$ avec $\mu \neq 0$ (i.e. le DL en a à l'ordre n de g commence par μx^q), on peut utiliser un DL de f à l'ordre $n - p$.

Cette technique permet d'alléger les calculs mais n'est pas indispensable. On peut toujours développer chacun des termes à l'ordre n et mettre tout ce qu'il y a en trop dans le $o(x^n)$, on trouve alors le même résultat. *Il vaut toujours mieux développer à un ordre trop élevé que de ne pas assez développer et de se retrouver bloqué.*

Exemple 3.13 Trouver le développement limité de $x \mapsto (1 - \cos(x)) \sin(x)$ à l'ordre 6.

Exemple 3.14 Soient f, g deux fonctions qui admettent les DL suivants en 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + x^4 - x^5 + x^9 + o(x^9) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - 2x^3 + x^4 + o(x^4).$$

1. Jusqu'à quel ordre peut-on déterminer un DL de fg en 0 ?
2. Le déterminer.



En général, pour une somme ou un produit, il est impossible de donner le DL à des ordres plus élevés que ceux apparaissant dans les DL d'origine. Par exemple, on a,

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(x) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

mais on ne peut pas déduire le DL du produit $x \mapsto \cos(x) \times e^x$ à l'ordre 2 ou 2. La raison est que le $o(x)$ du DL de $\cos(x)$ cache des termes utiles pour un DL à l'ordre 2 ou 3.

Inverse

Proposition 3.15 Soient f une fonction admettant un $DL_n(a)$.

Si f a une limite non nulle en a alors $\frac{1}{f}$ admet un $DL_n(a)$.

Pour calculer un $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+f(x)}$ avec $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on écrit le $DL_n(0)$ de $f(x)$, puis on utilise le DL de

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots + (-1)^n u^n + o(u^n)$$

en remplaçant u par le $DL_n(0)$ de f .

Exemple 3.16 Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \frac{1}{1 + \ln(1+x)}$.

Pour faire le DL en 0 d'une fonction de la forme $\frac{1}{g(x)}$ avec $g(x)$ qui ne tend pas vers 0, on se ramène par factorisation du dénominateur à la forme précédente.

Exemple 3.17 Faire le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2+x+x^2}$.

Quotient

Proposition 3.18 Soient f et g deux fonctions admettant des $DL_n(a)$.

Si g a une limite non nulle en a alors $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(a)$.

On rappelle que

$$\frac{o(x^n)}{x^p} =$$

Ainsi l'ordre d'un DL diminue de p lorsque l'on divise par x^p . Pour compenser cette perte, il faut développer plus que ce qui est demandé au départ.

Si g a une limite non nulle en 0 : Pour déterminer le DL_n en a de f/g , on écrit

$$\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$$

On se ramène donc au calcul du DL d'un produit et d'un inverse.

Exemple 3.19 Donner le DL à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Si g a une limite nulle en 0, $\frac{f}{g}$ peut tout de même admettre un DL. Pour cela, on essaye factoriser f et g par le premier terme non nul de leur DL.

Exemple 3.20 Trouver le DL en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \frac{x^3}{\operatorname{sh}(x) - x}$.

Composition

Aucune règle générale n'est à connaître sur la forme général d'une composition de deux DL. Il faut seulement savoir trouver le DL dans des exemples pratiques. Pour trouver le DL de $x \mapsto f(\varphi(x))$, on commence toujours par le DL de $x \mapsto \varphi(x)$ (la fonction «à l'intérieur») puis on applique celui de $x \mapsto f(x)$ (la fonction «à l'extérieur»).

Exemple 3.21 Faire le DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

Développement limité et équivalent en un autre point que 0

Pour obtenir le DL (ou un équivalent) en $a \neq 0$, on effectue le changement de variable $h = x - a \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

À la fin du calcul, on revient en x , ce qui fait apparaître les puissances $(x - a)^p$ qu'il ne faut surtout pas développer. Ainsi, $o(h^p)$ devient $o((x - a)^p)$.

Exemple 3.22 Effectuer le DL en $\pi/2$ à l'ordre 3 de $x \mapsto \cos(x)$.

Exemple 3.23 Effectuer le DL en 2 à l'ordre 3 de $x \mapsto \ln(x)$.

4 Applications des développements limités

Les développements limités donnent des informations précises sur le **comportement local** d'une fonction autour d'un point a . Dans la pratique, cet outil va s'avérer redoutable pour :

- ★ Déterminer des limites et des équivalents.
- ★ Étudier la position relative d'une courbe et de sa tangente.
- ★ Comprendre de manière plus précise le comportement asymptotique d'une fonction en $\pm\infty$: existence d'asymptote, position relative de la courbe et de l'asymptote,...

4.1 Détermination de limite/d'équivalent

Proposition 4.1 Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. Si f admet un un $DL_n(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_p(x-a)^p + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

avec $a_p \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x-a)^p$$

Pour obtenir un équivalent d'un produit ou d'un quotient, il n'est pas nécessaire de chercher le DL de tout l'ensemble. Par contre, dès qu'on est confronté à une somme, on devra nécessairement passer par le DL de chacun des termes.

Exemple 4.2 Déterminer un équivalent en 0 de $t \mapsto e^t + e^{2t} - 2$.

Exemple 4.3 Déterminer un équivalent puis la limite en 0^+ de $x \mapsto \frac{e^x - 1 - x}{x^3}$.

Exemple 4.4 Déterminer un équivalent puis la limite en 1 de $x \mapsto \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}$.

Exemple 4.5 Trouver un équivalent de $t \mapsto \ln(\cos(t))$ en 0.

4.2 Position relative d'une courbe et de sa tangente

Considérons une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui admet un DL à un ordre $n \geq 2$ en un point a . Alors on peut écrire

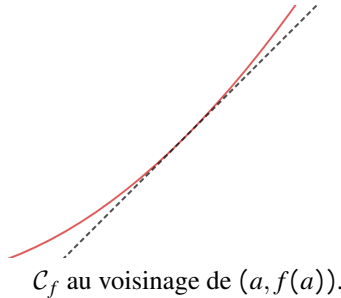
$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Les premiers termes $f(a) + f'(a)(x-a)$ sont les termes que l'on retrouve dans l'équation de la tangente en $a : y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Pour comprendre comment se comporte la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de a , il faut regarder les termes d'ordres plus élevés. Regardons deux situations particulières :

Le terme $a_2 \neq 0$

Alors $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_2(x-a)^2$ et $x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ va adopter l'allure d'une parabole au voisinage de a .

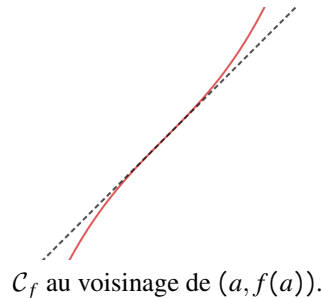
Conséquence : \mathcal{C}_f ne se situe que d'un côté de la tangente en a au voisinage de a .



Le terme $a_2 = 0$ et $a_3 \neq 0$

Alors $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_3(x-a)^3$ et $x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ va adopter l'allure de $x \mapsto (x-a)^3$ au voisinage de a .

Conséquence : \mathcal{C}_f traverse une fois la tangente en a au voisinage de a .



On retiendra le résultat suivant.

Proposition 4.6 — Position relative d'une courbe et de sa tangente. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que f admet un développement limité en a à l'ordre $p \geq 2$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p) \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0.$$

1. Si p est pair alors \mathcal{C}_f ne traverse pas sa tangente au point $(a, f(a))$. De plus,
 - ★ Si $a_p > 0$ alors \mathcal{C}_f est au dessus de sa tangente.
 - ★ Si $a_p < 0$ alors \mathcal{C}_f est en dessous de sa tangente.
2. Si p est impair alors \mathcal{C}_f traverse sa tangente. Il s'agit d'un point d'inflexion.

Exemple 4.7 Déterminer la position relative du sinus et de sa tangente en 0. *Faire une illustration graphique.*

Exemple 4.8 Déterminer la position relative de la fonction exponentielle et de sa tangente en 1. *Faire une illustration graphique.*

4.3 Position relative d'une courbe à une asymptote

Définition 4.9 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ax + b + o(1) \quad (\text{Ceci n'est pas un DL...})$$

Si $a \neq 0$ alors il s'agit d'une asymptote oblique. Si $a = 0$ alors il s'agit d'une asymptote horizontale.

En allant chercher un ordre supplémentaire dans le DL, on peut aussi dans certains cas déterminer le signe, au voisinage de $+\infty$, de $f(x) - ax - b$ et donc la position relative de la courbe et son asymptote.

- Si $f(x) - ax - b$ est positif au voisinage de $+\infty$ alors \mathcal{C}_f reste au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
- Si $f(x) - ax - b$ est négatif au voisinage de $+\infty$ alors \mathcal{C}_f reste en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exemple 4.10 Soit $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x > 1, \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x}}.$$

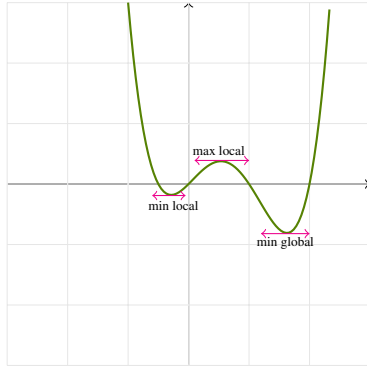
Déterminons l'éventuelle asymptote en $+\infty$ et la position relative de \mathcal{C}_f et de cette asymptote.

4.4 Condition nécessaire, suffisante pour un extremum local

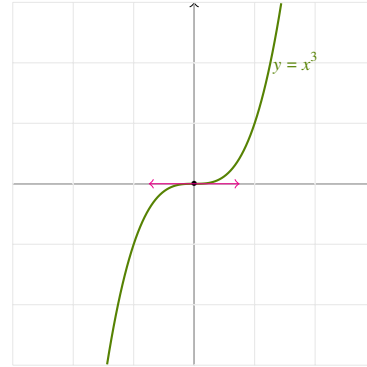
Définition 4.11 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f admet un maximum local en a lorsque f est majorée par $f(a)$ au voisinage de a .
- On dit que f admet un minimum local en a lorsque f est minorée par $f(a)$ au voisinage de a .

Proposition 4.12 — Condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur. Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ à l'intérieur de I . Si f est dérivable en a et possède un extremum local en a , alors a est un point critique de f , c'est-à-dire $f'(a) = 0$.



La dérivée de la fonction représentée s'annule trois fois et chaque point est un extremum local.



La dérivée de la fonction cube s'annule en 0 mais 0 n'est pas un extremum local.

Pour trouver des extrema locaux, on peut procéder de la manière suivante.

1. On cherche les points d'annulation de la dérivée. Cela donne seulement **des candidats** pour les extrema.
2. On doit étudier chacun des candidats et démontrer à la main s'ils sont effectivement des extremum local ou non.

Exemple 4.13 Trouver les extrema locaux de la fonction $f : x \mapsto 4x^3 - 3x^4 + 1$. *Faire l'illustration graphique.*

On peut aller plus vite pour décider si un point critique est un extremum local grâce à la proposition suivante.

Proposition 4.14 — Nature d'un point critique. Soient $a \in I$ un point intérieur (c'est à dire $\inf I < a < \sup I$) et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité en a à l'ordre $p \geq 2$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p) \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0.$$

Supposons que $f'(a) = 0$ (on dit que a est un point critique). Alors :

1. Si p est pair alors f admet un extremum local en a . De plus,
 - ★ Si $a_p > 0$ alors f admet un minimum local en a .
 - ★ Si $a_p < 0$ alors f admet un maximum local en a .
2. Si p est impair alors f n'admet pas d'extremum local en a .

En particulier, si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ alors f admet un minimum local en a et si $f''(a) < 0$ alors f admet un maximum local en a . Si $f''(a) = 0$ alors on ne peut rien dire (il faut aller chercher le premier terme non nul dans le DL).

Exemple 4.15 Soit la fonction polynomiale $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ définie sur \mathbb{R} .

1. Déterminer les points critiques de f .
2. Déterminer les extrema locaux de f .