

# TD 28 – Développements limités

## 1 Trouver un DL grâce à Taylor-Young

**Exercice 1** – À l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer les DL suivants :

1.  $DL_5(1)$  de  $f : x \mapsto e^x$ .
2.  $DL_3(\pi/3)$  de  $g : x \mapsto \cos(x)$ .

**Exercice 2** – Dans cet exercice, on souhaite prouver le DL usuel de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$  en 0.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x-1)^{n+1}}$$

2. En appliquant la formule de Taylor-Young, retrouver le DL à tout ordre de  $f$  en 0.

**Exercice 3** – Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $I$  contenant 0. Déterminer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

*Indication : Taylor-Young. On admet que*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x-0} = f''(0)$$

**Exercice 4** – Soient  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $I$  et  $a$  un point de  $I$ . Déterminer la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

*Indication : Taylor-Young.*

## 2 Opérations sur les DL

**Exercice 5 – Somme et produits.** Déterminer les développements limités en 0 à l'ordre précisé :

- a)  $DL_4(0)$  de  $\sin(x) + \cos(x)$
- b)  $DL_3(0)$  de  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- c)  $DL_4(0)$  de  $\ln(1+x) - (1+x)^2$
- d)  $DL_4(0)$  de  $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
- e)  $DL_6(0)$  de  $\frac{\ln(1+x)}{x}$
- f)  $DL_7(0)$  de  $(1 - \cos(x))(1 - \operatorname{ch}(x))$
- g)  $DL_3(0)$  de  $\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$
- h)  $DL_4(0)$  de  $(\ln(1+x))^2$
- i)  $DL_5(0)$  de  $\left(\frac{x}{1-x}\right)^3$
- j)  $DL_{10}(0)$  de  $((\operatorname{ch}(x) - \cos(x))(\operatorname{sh}(x) - \sin(x)))^2$

**Exercice 6** – Déterminer le  $DL_{20}(0)$  de  $x \mapsto (\sin(x) + \operatorname{sh}(x) - 2x)^2 (\cos(x) + \operatorname{ch}(x) - 2)^3$ . On pourra réfléchir au préalable à quel ordre il suffit de développer chacun des termes pour obtenir au total de l'ordre 20.

**Exercice 7 – Composition et inverses.** Déterminer les développements limités en 0 à l'ordre précisé :

- a)  $DL_3(0)$  de  $e^{\sin(x)}$
- b)  $DL_4(0)$  de  $\ln(\cos(x))$
- c)  $DL_4(0)$  de  $\sqrt{1+x \sin(x)}$
- d)  $DL_2(0)$  de  $\frac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1}$
- e)  $DL_2(0)$  de  $\sqrt{3 + \cos(x)}$
- f)  $DL_2(0)$  de  $\frac{xe^{-x}}{2x+1}$
- g)  $DL_2(0)$  de  $\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$
- h)  $DL_3(0)$  de  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$
- i)  $DL_2(0)$  de  $\frac{x - \sin(x)}{\ln(1+x) - x}$
- j)  $DL_4(0)$  de  $\frac{1}{4 + \sin(x) - 3 \cos(x)}$

**Exercice 8 – DL pas en 0.** Déterminer les développements limités aux points et à l'ordre précisés grâce à un changement de variables adéquat.

- a)  $DL_3(2)$  de  $e^x$
- b)  $DL_3(2)$  de  $\sqrt{x}$
- c)  $DL_3(1)$  de  $\frac{\ln(x)}{x}$
- d)  $DL_3(\pi/3)$  de  $\sin(x)$

**Exercice 9 – Primitivation.** En utilisant le théorème de la primitivation, donner le développement limité de  $\arcsin$  en 0 à l'ordre  $n$ .

**Exercice 10 – Primitivation.**

1. Retrouver le  $DL_1(0)$  de la fonction  $\tan$  par quotient de DL.
2. Rappeler le lien entre  $\tan'$  et  $\tan^2$ .
3. En déduire le  $DL_3(0)$  de  $\tan$ .
4. En suivant la même idée, déterminer le  $DL_5(0)$  de  $\tan$ .

## 3 Calculs d'équivalents et de limite

**Exercice 11** – Calculer un équivalent puis la limite des fonctions suivantes en 0.

- a)  $x \mapsto \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$
- b)  $x \mapsto \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$
- c)  $x \mapsto \frac{x^4}{\cos(2x) - e^{-2x^2}}$
- d)  $x \mapsto \frac{\sin(x) - \sin(x)}{\sqrt{1+x^3} - 1}$
- e)  $x \mapsto \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$
- f)  $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
- g)  $x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$
- h)  $x \mapsto \frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2}$
- i)  $x \mapsto \frac{1}{x^2} (e^{\cos(x)-1} - 1)$
- j)  $x \mapsto \frac{e^{\sin(3x)} - e^{\sin(x)}}{x}$

**Exercice 12** – Calculer les limites des fonctions suivantes.

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$       b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$       d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$

**Exercice 13** – Déterminer les limites des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  suivantes.

a)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 \left( e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) \right)$

b)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left[ \cos \left( \frac{n\pi}{3n+1} \right) + \sin \left( \frac{n\pi}{6n+1} \right) \right]^n$

## 4 Étude locale d'une fonction

**Exercice 14** – Position relation par rapport à une tangente.

Déterminer la tangente en 0 des fonctions suivantes ainsi que la position de leur courbe représentative par rapport à cette tangente.

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$

2.  $f : x \mapsto \frac{1}{1 + e^x}$

**Exercice 15** – Une asymptote oblique. Soit  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ .

- Déterminer un équivalent simple de  $f$  en  $+\infty$ .
- Montrer que  $f$  possède une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  et préciser sa position relative par rapport à la courbe de  $f$ .

**Exercice 16** – Extrema locaux. On considère la fonction

$$f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$

Trouver les points critiques de  $f$  et déterminer leurs natures.

## 5 Pour aller plus loin

**Exercice 17** –

- Déterminer le  $DL_2(0)$  de  $x \mapsto \ln \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)$ .
- En déduire l'existence et la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right)^n$ .

**Exercice 18** – On pose,

$$\forall x \in ]-1, +\infty[ \setminus \{0\}, \quad f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

- Justifier que  $f$  est continue sur  $] -1, 0[$  et sur  $] 0, +\infty[$ .
- Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
- On dit que  $f$  est dérivable en 0 si

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}$$

Montrer que  $f$  est dérivable en 0.

- Quelle est alors la position relative de la courbe de  $f$  par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0?

**Exercice 19** – Soit  $f : x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{1 - \cos(2x)}$ .

- Donner l'ensemble de définition de  $f$ .
- Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0 mais n'est pas prolongeable par continuité en  $\pi$ .