

TD 28 – Développements limités (Correction)

1 Trouver un DL grâce à Taylor-Young

Exercice 1 – À l'aide de la formule de Taylor-Young, déterminer les DL suivants :

1. $DL_5(1)$ de $f : x \mapsto e^x$

$$e^x \underset{x \rightarrow 1}{=} e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + \frac{e}{24}(x-1)^4 + \frac{e}{120}(x-1)^5 + o((x-1)^5)$$

2. $DL_3(\pi/3)$ de $g : x \mapsto \cos(x)$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)$$

Exercice 2 – Dans cet exercice, on souhaite prouver le DL usuel de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(x-1)^{n+1}}$$

2. En appliquant la formule de Taylor-Young, retrouver le DL à tout ordre de f en 0.

Exercice 3 – Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle I contenant 0. Déterminer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x) - f(0)}{x}}{x}.$$

Indication : Taylor-Young. On admet aussi que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f''(0)$$

Grâce à la formule de Taylor-Young,

$$\frac{f'(x) - \frac{f(x) - f(0)}{x}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} - \frac{f''(0)}{2} + o(1)$$

Donc,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x) - f(0)}{x}}{x} = \frac{f''(0)}{2}}$$

Exercice 4 – Soient f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle I et a un point de I . Déterminer la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

Indication : Taylor-Young.

Grâce à la formule de Taylor-Young,

$$\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a) + o(1)$$

Donc,

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)}$$

2 Opérations

sur

les

DL

Exercice 5 – Somme et produits. Déterminer les développements limités en 0 à l'ordre précisé:

a) $DL_4(0)$ de $\sin(x) + \cos(x)$

$$\sin(x) + \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

b) $DL_3(0)$ de $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

c) $DL_4(0)$ de $\ln(1+x) - (1+x)^2$

$$\ln(1+x) - (1+x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 - x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

d) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$

$$\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

e) $DL_6(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{x}$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{7} + o(x^6)$$

f) $DL_7(0)$ de $(1 - \cos(x))(1 - \operatorname{ch}(x))$

$$(1 - \cos(x))(1 - \operatorname{ch}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^4}{4} + o(x^7)$$

g) $DL_3(0)$ de $\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

h) $DL_4(0)$ de $(\ln(1+x))^2$

$$(\ln(1+x))^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4)$$

i) $DL_5(0)$ de $\left(\frac{x}{1-x}\right)^3$

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + 3x^4 + 6x^5 + o(x^5)$$

j) $DL_{10}(0)$ de $((\operatorname{ch}(x) - \cos(x))(\operatorname{sh}(x) - \sin(x)))^2$

$$((\operatorname{ch}(x) - \cos(x))(\operatorname{sh}(x) - \sin(x)))^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^{10}}{9} + o(x^{10})$$

Exercice 6 – Déterminer le $DL_{20}(0)$ de $x \mapsto (\sin(x) + \operatorname{sh}(x) - 2x)^2(\cos(x) + \operatorname{ch}(x) - 2)^3$. On pourra réfléchir au préalable à quel ordre il suffit de développer chacun des termes pour obtenir au total de l'ordre 20.

$$\boxed{(\sin(x) + \operatorname{sh}(x) - 2x)^2(\cos(x) + \operatorname{ch}(x) - 2)^3 = o(x^{20})_{x \rightarrow 0}}$$

Exercice 7 – Composition et inverses. Déterminer les développements limités en 0 à l'ordre précisé:

a) $DL_3(0)$ de $e^{\sin(x)}$

$$e^{\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

b) $DL_4(0)$ de $\ln(\cos(x))$

$$\ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

c) $DL_4(0)$ de $\sqrt{1+x\sin(x)}$

$$\sqrt{1+x\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

d) $DL_2(0)$ de $\frac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1}$

$$\frac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

e) $DL_2(0)$ de $\sqrt{3 + \cos(x)}$

$$\sqrt{3 + \cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

f) $DL_2(0)$ de $\frac{xe^{-x}}{2x+1}$

$$\frac{xe^{-x}}{2x+1} \underset{x \rightarrow 0}{=} x - 3x^2 + o(x^2)$$

g) $DL_2(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$

$$\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)$$

h) $DL_3(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} e - \frac{e}{2}x + \frac{11ex^2}{24} - \frac{7ex^3}{16} + o(x^3)$$

i) $DL_2(0)$ de $\frac{x - \sin(x)}{\ln(1+x) - x}$

$$\frac{x - \sin(x)}{\ln(1+x) - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x}{3} - \frac{2x^2}{9} + o(x^2)$$

j) $DL_4(0)$ de $\frac{1}{4 + \sin(x) - 3\cos(x)}$

$$\frac{1}{4 + \sin(x) - 3\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{13x^3}{6} - \frac{35x^4}{24} + o(x^4)$$

Exercice 8 – DL pas en 0. Déterminer les développements limités aux points et à l'ordre précisés grâce à un changement de variables adéquat.

a) $DL_3(2)$ de e^x

$$e^x \underset{x \rightarrow 2}{=} e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2 + \frac{e^2}{6}(x-2)^3 + o((x-2)^3)$$

b) $DL_3(2)$ de \sqrt{x}

$$\sqrt{x} \underset{x \rightarrow 2}{=} \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3 + o((x-2)^3)$$

c) $DL_3(1)$ de $\frac{\ln(x)}{x}$

$$\frac{\ln(x)}{x} \underset{x \rightarrow 1}{=} x - 1 - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

d) $DL_3(\pi/3)$ de $\sin(x)$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(x - \frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{12}(x - \frac{\pi}{3})^3 + o((x - \frac{\pi}{3})^3)$$

Exercice 9 – Primitivation. En utilisant le théorème de la primitivation, donner le développement limité de $\arcsin x$ en 0 à l'ordre n .

$DL_n(0)$ vaut :

$$\arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 3 \times x^5}{2 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times x^{2n+1}}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) \times (2n+1)} + o(x^{2n+2})$$

ou (autre formulation) :

$$\arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{2 \times 3} + \frac{3 \times x^5}{8 \times 5} + \cdots + \frac{(2n)! \times x^{2n+1}}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} + o(x^{2n+2})$$

Exercice 10 – Primitivation.

1. Retrouver le $DL_1(0)$ de la fonction \tan par quotient de DL.

On a,

$$\begin{aligned}\boxed{\tan(x)}_{x \rightarrow 0} &= \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} \\ &=_{x \rightarrow 0} (x + o(x)) \times \frac{1}{1 + o(x)} \\ &=_{x \rightarrow 0} (x + o(x)) \times (1 + o(x)) \\ &=_{x \rightarrow 0} \boxed{x + o(x)}\end{aligned}$$

2. Rappeler le lien entre \tan' et \tan^2 .

3. En déduire le $DL_3(0)$ de \tan .

On a,

$$\begin{aligned}\tan'(x)_{x \rightarrow 0} &= 1 + \tan^2(x) \\ &=_{x \rightarrow 0} 1 + (x + o(x))^2 \\ &=_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

Donc, en primitivant on obtient,

$$\boxed{\tan(x) = \underbrace{\tan(0)}_{=0} + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

4. En suivant la même idée, déterminer le $DL_5(0)$ de \tan .

On a,

$$\begin{aligned}\tan'(x)_{x \rightarrow 0} &= 1 + \tan^2(x) \\ &=_{x \rightarrow 0} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 \\ &=_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\end{aligned}$$

Donc, en primitivant on obtient,

$$\boxed{\tan(x) = \underbrace{\tan(0)}_{=0} + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)}$$

3 Calculs d'équivalents et de limite

Exercice 11 – Calculer un équivalent puis la limite des fonctions suivantes en 0.

a) $x \mapsto \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

b) $x \mapsto \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$

$$\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x}{2} \rightarrow 0$$

c) $x \mapsto \frac{x^4}{\cos(2x) - e^{-2x^2}}$

$$\frac{x^4}{\cos(2x) - e^{-2x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{3}{4} \rightarrow -\frac{3}{4}$$

d) $x \mapsto \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1}$

$$\frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

e) $x \mapsto \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$

$$\frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{6}$$

f) $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

g) $x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{3} \rightarrow -\frac{1}{3}$$

h) $x \mapsto \frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2}$

$$\frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 \rightarrow 1$$

i) $x \mapsto \frac{1}{x^2} (e^{\cos(x)-1} - 1)$

$$\frac{1}{x^2} (e^{\cos(x)-1} - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

j) $x \mapsto \frac{e^{\sin(3x)} - e^{\sin(x)}}{x}$

$$\frac{e^{\sin(3x)} - e^{\sin(x)}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$$

Exercice 12 – Calculer les limites des fonctions suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

$$x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$

$$\frac{1 - x + \ln(x)}{1 - \sqrt{2x - x^2}} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -1 \rightarrow -1$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$

$$\frac{\sin(x) - \cos(x)}{x - \frac{\pi}{4}} \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{\sim} \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$$

Exercice 13 – Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ suivantes.

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 \left(e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) \right)$

On a, par formule d'addition du sinus,

$$u_n = n^2 \left(e^{\frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$$

D'où

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1) \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \rightarrow 1}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left[\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) \right]^n$

Tout d'abord, on doit passer à la forme exponentielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \exp \left[n \ln \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) \right) \right]$$

Grâce à la formule de Taylor-Young, on a le DL du cosinus autour de $\frac{\pi}{3}$:

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}{=} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + o\left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

On en déduit que

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6(3n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

De même, grâce à la formule de Taylor-Young, on a le DL du sinus autour de $\frac{\pi}{6}$:

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{6}}{=} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + o\left(x - \frac{\pi}{6} \right)$$

On en déduit que

$$\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18(6n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où

$$\begin{aligned} \ln \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) \right) &= \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{6(3n+1)} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18(6n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &\sim \frac{\sqrt{3}\pi}{6(3n+1)} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18(6n+1)} \end{aligned}$$

D'où

$$n \ln \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) \right) \sim \frac{\sqrt{3}\pi}{6 \times 3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18 \times 6} = \frac{\pi}{8\sqrt{3}}$$

Enfin, par composition,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \exp\left(\frac{\pi}{8\sqrt{3}}\right)}$$

4 Étude locale d'une fonction

Exercice 14 – Position relation par rapport à une tangente. Déterminer la tangente en 0 des fonctions suivantes ainsi que la position de leur courbe représentative par rapport à cette tangente.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \ln(1+x+x^2)$

La tangente de f en 0 a pour équation :

$$y = x$$

De plus, on a le DL suivant :

$$\ln(1+x+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

La courbe est au voisinage de 0.

2. $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$

La tangente de f en 0 a pour équation :

$$y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$$

De plus, on a le DL suivant :

$$\frac{1}{1+e^x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

La courbe en 0.

Exercice 15 – Une asymptote oblique. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$.

1. Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.

On peut montrer que

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x}$$

2. Montrer que f possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et préciser sa position relative par rapport à la courbe de f .

On peut montrer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc, f admet la droite d'équation $\boxed{y = x + \frac{1}{2}}$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et la courbe de f est $\boxed{\text{au-dessus}}$ de cette asymptote.

Exercice 16 – Extrema locaux. On considère la fonction

$$f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$

Trouver les points critiques de f et déterminer leurs natures.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$$

Donc la fonction f admet deux points critiques : 2 et -1 .

- Étude du point 2. On peut calculer que

$$f'(2) = 0 \quad \text{et} \quad f''(2) = 18 > 0$$

Donc f admet un minimum local en 2.

- Étude du point -1 . On peut calculer que

$$f'(-1) = 0 \quad \text{et} \quad f''(-1) = -18 < 0$$

Donc f admet un maximum local en -1 .

5 Pour aller plus loin

Exercice 17 –

1. Déterminer le $DL_2(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.

On peut montrer (cf Exemple du cours) que

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

2. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$.

On passe par la forme exponentielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \exp\left(n \ln\left(n \sin \frac{1}{n}\right)\right)$$

Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, d'après la question précédente,

$$\ln\left(n \sin \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) \sim -\frac{1}{6n^2}$$

Donc,

$$n \ln\left(n \sin \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{6n}$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(n \sin \frac{1}{n}\right) = 0$$

puis, par composition,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1}$$

Exercice 18 – On pose,

$$\forall x \in]-1, +\infty[\setminus\{0\}, \quad f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

1. Justifier que f est continue sur $] -1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

On a,

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

La fonction f admet une limite finie en 0 : elle est prolongeable par continuité en 0.

3. On dit que f est dérivable en 0 si

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}$$

Montrer que f est dérivable en 0.

On a,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Le taux d'accroissement en 0 de f admet une limite finie : la fonction f est dérivable en 0.

4. Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0?

La tangente de f en 0 a pour équation :

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

De plus, on a le DL suivant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4}$$

La courbe est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 19 – Soit $f : x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{1 - \cos(2x)}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .

La fonction f n'est pas définie si

$$\cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \pmod{0[2\pi]} \Leftrightarrow x \pmod{0[\pi]}$$

Donc l'ensemble de définition de f est

$$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 mais n'est pas prolongeable par continuité en π .

- Par quotient d'équivalent, on peut montrer par opérations sur les DL usuels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{4}$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$$

Donc, f est prolongeable par continuité en 0.

- Pour faire l'étude en π , on peut faire le changement de variables $h = x - \pi$:

$$f(h + \pi) = \frac{1 - \cos(h + \pi)}{1 - \cos(2(h + \pi))} = \frac{1 + \cos(h)}{1 - \cos(2h)}$$

Donc,

$$f(h + \pi) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{2h^2} = \frac{1}{h^2}$$

Donc, en revenant à la variable initiale

$$f(x) \underset{x \rightarrow \pi}{\sim} \frac{1}{(x - \pi)^2}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc, f n'est pas prolongeable par continuité en π .