

# 29. Applications Linéaires

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Les ensembles  $E, F, G$  et  $H$  désignent des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

## 1 Application linéaire entre espaces vectoriels

### 1.1 La notion de linéarité

**Définition 1.1** On dit qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est une **application linéaire** (ou **morphisme**) si elle préserve les combinaisons linéaires :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) + \mu \cdot f(\vec{y})$$

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

**Remarque 1.2** La relation de la Définition 1.1 se généralise à plus de termes. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors, pour tout  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$  et tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ ,

$$f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \dots + \lambda_n f(\vec{x}_n)$$

soit encore

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{x}_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\vec{x}_k)$$

#### ? Méthode 1 - Savoir montrer qu'une application est linéaire.

Pour montrer qu'une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est une application linéaire, la rédaction est la suivante :

« Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels et  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Montrons que

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v). \text{ »}$$

**Exemple 1.3** Montrer que l'application  $f$  suivante est linéaire,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, -x - y) \end{aligned}$$

**Exemple 1.4** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . Montrer que l'application  $f$  suivante est linéaire,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

**? Méthode 2 - Savoir montrer qu'une application n'est pas linéaire.**

Pour montrer que l'application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  n'est pas linéaire, il s'agit de trouver deux vecteurs  $u$  et  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que

$$f(u+v) \neq f(u) + f(v).$$

**Exemple 1.5** Montrer que l'application  $f$  suivante n'est pas linéaire,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

**Proposition 1.6** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

$$f(0_E) = 0_F$$

**Exemple 1.7** Montrer que l'application  $f$  suivante n'est pas linéaire,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (3x - y, x + 5y + 1) \end{aligned}$$

**Définition 1.8**

- Un **endomorphisme de**  $E$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ . Si  $E = F$ , on note donc plus simplement  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .
- Si  $F = \mathbb{K}$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  est une application linéaire, on dit que  $f$  est une **forme linéaire**.

**Exemple 1.9** Dire si les applications linéaires suivantes sont des endomorphismes ou des formes linéaires.

Application linéaire de $E$ dans $F$	Endomorphisme ? Forme linéaire ?
$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; (x, y) \mapsto (y, x + 2y, -x)$	
$f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} ; (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$	
$\delta : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) ; f \mapsto f'$	
$\mathcal{I} : \mathcal{C}^0([a, b]) \rightarrow \mathbb{R} ; f \mapsto \int_a^b f(t) dt$	
$f_A : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n ; X \mapsto AX$ (avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ )	
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) ; M \mapsto M^T$	
$\mathbb{K}[X] \mapsto \mathbb{K} ; P \mapsto P(a)$ avec $a \in \mathbb{K}$	

**Définition 1.10 — Endomorphismes simples.**

- L'application  $\text{id}_E : E \rightarrow E ; \vec{x} \mapsto \vec{x}$  est un endomorphisme de  $E$ , appelé **identité de**  $E$ .
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , l'application  $\lambda \text{id}_E : E \rightarrow E ; \vec{x} \mapsto \lambda \vec{x}$  est un endomorphisme de  $E$ , appelé **homothétie de rapport**  $\lambda$ .

**Exemple 1.11** Montrer que l'application  $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] ; P \mapsto XP^j$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

## 1.2 Différentes représentations d'une application linéaire

1. Une application linéaire peut être donnée par son **expression analytique** : pour tout  $\vec{x} \in E$ , on donne l'expression de  $f(\vec{x})$ . Dans ce qui précède, les applications linéaires ont été données sous cette forme (voir tableau précédent).
2. Dans le cas où l'espace de départ  $E$  est de dimension finie, une application linéaire est entièrement déterminée par **l'image d'une base** de  $E$ , c'est-à-dire si l'on connaît les valeurs de  $f$  en chaque vecteur d'une base de  $E$ .

**Théorème 1.12** On suppose  $E$  de dimension finie  $n$ . Soit  $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  est une base de  $E$ . Pour tous vecteurs  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$  de  $F$ , il existe une unique application linéaire  $f : E \rightarrow F$  telle que,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$$

**Exemple 1.13** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire telle que  $f(1) = 1$ . Déterminer l'expression de  $f$ .

⚠ Attention, le raisonnement de l'Exemple précédent est faux si l'application suivante n'est plus linéaire. En effet, les deux fonctions  $x \mapsto |x|$  et  $x \mapsto \ln(x) + 1$  prennent toutes les deux la valeur 1 en 1, mais ce ne sont pas des fonctions identités.

**Exemple 1.14** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire telle que  $f(1, 0) = 2$  et  $f(0, 1) = 3$ . Déterminer l'expression de  $f$ .

**Proposition 1.15** Supposons  $E$  de dimension finie. Alors deux applications linéaires sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base de  $E$ .

3. Dans le cas où les espaces de départ et d'arrivée sont de dimension finie, on verra dans un chapitre ultérieur, que l'on pourra représenter une application linéaire grâce à une **matrice**.

4. En dimension quelconque, on peut aussi représenter une application linéaire via des restrictions à des **sous-espaces supplémentaires**. Deux sous-espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  sont supplémentaires dans  $E$  si  $E = E_1 \oplus E_2$ , c'est-à-dire que pour tout  $\vec{x} \in E$ , il existe un unique couple  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$  tel que  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ .

**Proposition 1.16** Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E : E = E_1 \oplus E_2$ . Soient  $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$  et  $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ . Alors il existe une unique application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que,

$$\begin{cases} 1. \forall \vec{x}_1 \in E_1, f(\vec{x}_1) = f_1(\vec{x}_1) \\ 2. \forall \vec{x}_2 \in E_2, f(\vec{x}_2) = f_2(\vec{x}_2) \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\forall \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in E, \quad f(\vec{x}) = f_1(\vec{x}_1) + f_2(\vec{x}_2)$$

**Exemple 1.17** Posons  $E_1 = \text{Vect}((1, 0, 0))$  et  $E_2 = \text{Vect}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ .

- (a) Montrer que  $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$ .  
 (b) Déterminer l'expression de l'unique application  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  telle que pour tout  $\vec{u} \in E_1$ ,  $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$  et pour tout  $\vec{v} \in E_2$ ,  $f(\vec{v}) = 3\vec{v}$ .

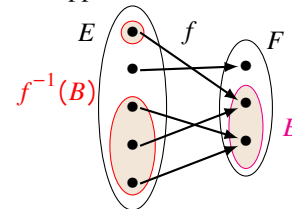
## 2 Noyau d'une application linéaire

### 2.1 Définition du noyau d'une application linéaire

On rappelle la définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application, linéaire ou non.

**Définition 2.1** Soient  $f : E \rightarrow F$  une application et  $B$  un sous-ensemble de  $F$ . L'**image réciproque de  $B$  par  $f$** , notée  $f^{-1}(B)$  est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) \in B\}$$



**Définition 2.2** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle **noyau** de l'application  $f$  l'ensemble

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = 0_F\} \subset E$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des antécédents de  $0_F$  par l'application  $f$ .

Le noyau de  $f$  est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène  $f(x) = 0_F$ , d'inconnue  $x \in E$ . D'une certaine manière,  $\ker f$  est l'ensemble des éléments de  $E$  que  $f$  ne « voit » pas. En effet, pour tous  $x \in E$  et  $k \in \ker f$ , par linéarité on a,  $f(x+k) = f(x)$ . Ainsi,  $\ker f$  mesure le « défaut d'injectivité » de  $f$ .

**Proposition 2.3** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

- Si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  alors  $f^{-1}(H)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- En particulier, le noyau de  $f$ ,  $\text{Ker}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

*Démonstration.* Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $F$ .

- ①  $f^{-1}(H) = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) \in H\} \subset E$  par définition.
- ② Comme  $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \in H$  puisque  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ ,  $\vec{0}_E \in f^{-1}(H)$ .
- ③ Soient  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in f^{-1}(H)$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Montrons que  $\lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{x}_2 \in f^{-1}(H)$ . On a

$$f(\lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{x}_2) = \lambda f(\vec{x}_1) + \mu f(\vec{x}_2)$$

par linéarité de  $f$ . Or  $\vec{x}_1 \in f^{-1}(H)$  et  $\vec{x}_2 \in f^{-1}(H)$ , donc  $f(\vec{x}_1) \in H$  et  $f(\vec{x}_2) \in H$ . Comme  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ ,  $\lambda f(\vec{x}_1) + \mu f(\vec{x}_2) \in H$ . D'où  $f(\lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{x}_2) \in H$ , soit encore  $\lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{x}_2 \in f^{-1}(H)$ . ■

#### ? Méthode 4 - Déterminer le noyau d'une application linéaire

Pour déterminer le noyau de l'application linéaire  $f : E \rightarrow F$ , il s'agit de trouver l'ensemble des antécédents de  $0_F$  par  $f$ , c'est-à-dire de résoudre l'équation  $f(u) = 0_F$  d'inconnue  $u \in E$ . Une rédaction appropriée peut être

« Soit  $u \in E$ . On a

$$u \in \text{Ker}(f) \iff f(u) = 0_F \iff \dots »$$

**Exemple 2.4** Déterminer le noyau de l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x - y, x + 3y - z)$$

**Exemple 2.5** Soit  $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] ; P \longmapsto P'$ . Déterminons le noyau de  $f$ .

**Exemple 2.6** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

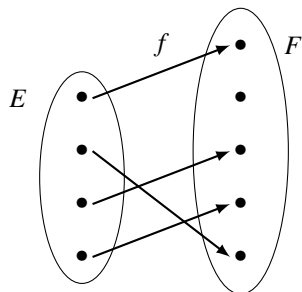
Soit  $g_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; M \longmapsto AM$ . Déterminons le noyau de  $g_A$ .

## 2.2 Lien entre le noyau d'une application linéaire et son injectivité

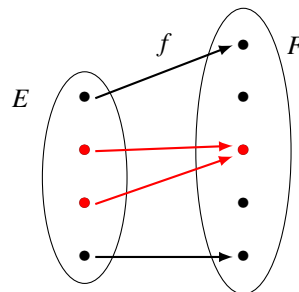
**Définition 2.7 — Rappel.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application. On dit que l'application  $f : E \rightarrow F$  est **injective** si

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Autrement dit, tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent dans  $E$  par  $f$ .



Injective



Non injective

**Proposition 2.8** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On a

$$L'application f : E \rightarrow F \text{ est injective} \iff \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Autrement dit, l'application  $f$  est injective si et seulement si l'élément  $0_F$  admet un unique antécédent par  $f$  donné par  $0_E$ .

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- Supposons que l'application  $f : E \rightarrow F$  est injective. Montrons que  $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ .
  - Montrons que  $\text{Ker}(f) \subset \{0_E\}$ .  
Soit  $u \in \text{Ker}(f)$ , c'est-à-dire  $f(u) = 0_F$ .  
Montrons que  $u \in \{0_E\}$ , c'est-à-dire que  $u = 0_E$ .  
On a  $f(u) = 0_F = f(0_E)$  (car  $f$  est linéaire).  
Donc, par injectivité de la fonction  $f$ , on a  $u = 0_E$ .
  - Montrons que  $\{0_E\} \subset \text{Ker}(f)$ .  
Soit  $u \in \{0_E\}$ , c'est-à-dire  $u = 0_E$ .  
Montrons que  $u \in \text{Ker}(f)$ , c'est-à-dire  $f(u) = 0_F$ .  
On a  $f(u) = f(0_E) = 0_F$  (car  $f$  est linéaire).
- Supposons que  $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ . Montrons que l'application  $f : E \rightarrow F$  est injective.  
Soit  $(x, x') \in E^2$  tel que  $f(x) = f(x')$ . Montrons que  $x = x'$ .  
Comme  $f(x) = f(x')$ , par linéarité de  $f$ , on obtient  $f(x - x') = 0_F$ .  
Donc  $x - x' \in \text{Ker}(f) = \{0_E\}$  par hypothèse.  
Donc  $x - x' = 0_E$ , c'est-à-dire  $x = x'$ . ■

Attention, cette propriété est fautive lorsque l'application n'est pas linéaire.

- Contre-exemple pour le sens indirect : Pour les applications  $x \mapsto x^2$  ou  $(x, y) \mapsto (x^2, y)$ , 0 admet bien 0 comme unique antécédent mais pourtant ces applications ne sont pas injectives.
- Contre-exemple pour le sens direct : Les applications  $x \mapsto x + 1$  ou  $x \mapsto e^x$  sont injectives mais pourtant 0 n'admet pas 0 comme unique antécédent.

### ? Méthode 5 - Déterminer si une application linéaire est injective

Pour déterminer si une application linéaire est injective,

- Étape 1 : Déterminer le noyau de l'application.
- Étape 2 : Conclure quant à l'injectivité
  - Si le noyau est réduit à l'élément neutre, alors la fonction est injective.
  - Si le noyau n'est pas réduit à l'élément neutre, alors la fonction n'est pas injective.

**Exemple 2.9** Déterminer si l'application  $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] ; P \longmapsto P'$  est injective.

- **Étape 1 : Déterminer le noyau de l'application.**

On a déjà montré que

$$\text{Ker}(D) = \{a \mid a \in \mathbb{R}\}$$

- **Étape 2 : Conclure quant à l'injectivité**

**Exemple 2.10** Déterminer si l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est injective où  $f$  est définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x, 3x, x - y)$$

### 3 Image d'une application linéaire

#### 3.1 Définition de l'image d'une application linéaire

On rappelle la définition de l'image d'un ensemble par une application, valable que l'application soit linéaire ou non.

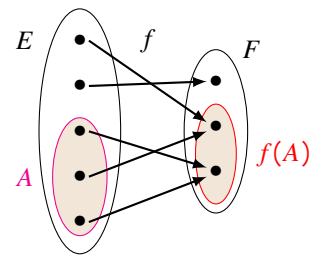
**Définition 3.1 — Image d'une application.** Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application.

- On appelle **image de A par f**, notée  $f(A)$  l'ensemble

$$f(A) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in A\}$$

- On appelle **image de f**, notée  $\text{Im}(f)$ , l'ensemble

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in E\}.$$



**Proposition 3.2** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

- Si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  alors  $f(H)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
- En particulier, l'image de  $f$ ,  $\text{Im}(f)$ , est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

*Démonstration.* Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- ❶  $f(H) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in H\} \subset F$  puisque  $f(\vec{x}) \in F$ .
- ❷ On a  $\vec{0}_F = f(\vec{0}_E) \in f(H)$  puisque  $\vec{0}_E \in H$  car  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- ❸ Soient  $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in f(H)$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Montrons que  $\lambda\vec{y}_1 + \mu\vec{y}_2 \in H$ . Comme  $\vec{y}_1 \in f(H)$ , il existe  $\vec{x}_1 \in H$  tel que  $\vec{y}_1 = f(\vec{x}_1)$ . De même, il existe  $\vec{x}_2 \in H$  tel que  $\vec{y}_2 = f(\vec{x}_2)$ . On a donc

$$\lambda\vec{y}_1 + \mu\vec{y}_2 = \lambda f(\vec{x}_1) + \mu f(\vec{x}_2) = f(\lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{x}_2)$$

par linéarité de  $f$ . Or  $\vec{x}_1 \in H$  et  $\vec{x}_2 \in H$ , donc  $\lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{x}_2 \in H$  car  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . D'où  $\lambda\vec{y}_1 + \mu\vec{y}_2 \in f(H)$ . ■

### ? Méthode 6 - Déterminer l'image d'une application linéaire

Pour déterminer l'image de l'application linéaire  $f : E \rightarrow F$ , il s'agit de trouver l'ensemble des vecteurs  $v$  de  $F$  tel que l'équation  $v = f(u)$  d'inconnue  $u \in E$  admette au moins une solution. Une rédaction appropriée peut être

« Soit  $v \in F$ . On a

$$v \in \text{Im}(f) \iff \exists u \in E, f(u) = v \iff \dots »$$

**Exemple 3.3** Déterminer l'image de l'application linéaire nulle  $f : E \rightarrow F ; x \mapsto \vec{0}_F$ .

**Exemple 3.4** Déterminer l'image de l'application linéaire  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 ; x \mapsto (x, 2x)$ .

## 3.2 Déterminer une base de l'image d'une application

Dans les faits, il peut être difficile de caractériser l'ensemble image d'une application linéaire «à la main». On utilisera donc plutôt la proposition suivante.

**Proposition 3.5** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $(u_1, \dots, u_n)$  est une famille génératrice de  $E$  alors  $(f(u_1), \dots, f(u_n))$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ , autrement dit,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n))$$

Ce résultat nous dit comment déterminer en pratique  $\text{Im } f$  : il suffit d'évaluer  $f$  sur une base. Si on compare avec des fonctions quelconques, par exemple une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  pour laquelle on a besoin de tout le graphe pour décrire la fonction, il est impressionnant que l'on puisse comprendre une application linéaire à partir d'un *nombre fini de valeurs*.

**? Méthode 7 - Déterminer une base de l'image d'une application linéaire**

Pour déterminer une base l'image de l'application linéaire  $f : F \rightarrow F$ , on peut

- Choisir une base  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  de l'espace de départ par exemple la base canonique de  $E$ .
- Expliciter la famille  $\mathcal{G} = (f(u_1), \dots, f(u_n))$  en calculant les images des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$ .
- Extraire une base de la famille  $\mathcal{G}$ .
  - Par construction, la famille  $\mathcal{G}$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ .
  - Soit cette famille est libre et alors c'est une base.
  - Soit cette famille est liée et on "supprime des vecteurs" jusqu'à la rendre libre.

**Exemple 3.6** Déterminer une base de l'image de l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$$

**Exemple 3.7** Déterminer une base de l'image de l'application  $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  définie par

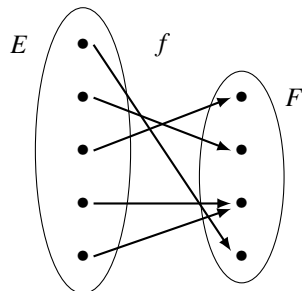
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = P'$$

### 3.3 Lien entre l'image d'une application linéaire et sa surjectivité

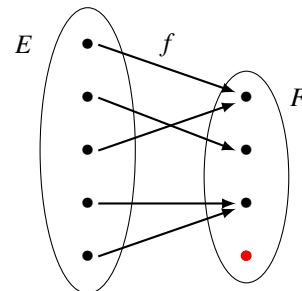
**Définition 3.8** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application. On dit que l'application  $f : E \rightarrow F$  est **surjective** si

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

Autrement dit, tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent dans  $E$  par  $f$ .



Surjective



Non surjective

**Proposition 3.9** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On a

$$\text{L'application } f : E \rightarrow F \text{ est surjective} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im}(f) = F$$

Cette proposition reste vraie même si l'application n'est pas linéaire (c'est seulement une réécriture de la notion de surjectivité).

#### ? Méthode 8 - Déterminer si une application linéaire est surjective

Pour déterminer si une application linéaire est injective,

- Étape 1 : Déterminer l'image de l'application.
- Étape 2 : Conclure quant à la surjective
  - Si l'image est tout l'ensemble d'arrivée, alors la fonction est surjective.
  - Si l'image n'est pas tout l'ensemble d'arrivée, alors la fonction n'est pas surjective.

**Exemple 3.10** Déterminer si l'application  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 ; x \mapsto (x, 2x)$  est surjective.

### 3.4 Rang d'une application linéaire

**Définition 3.11** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire. On dit que  $f$  est de **rang fini** si  $\text{Im}(f)$  est de dimension finie. On appelle alors **rang de  $f$** , noté  $\text{rg}(f)$ , la dimension de l'image de  $f$  :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

! Les notions de rang d'une famille de vecteurs et de rang d'une application linéaire ne sont heureusement pas sans rapport. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Si  $E = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$  alors

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Vect}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_p))) = \text{rg}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_p))$$

**Exemple 3.12** Déterminer le rang des applications linéaires suivantes. (Tous les ensembles images ont été calculés dans des exemples précédents).

Application linéaire de $E$ dans $F$	$\text{Im}(f)$	Rang de $f$
$f : E \rightarrow F, x \mapsto 0_F$	$\text{Im}(f) = \{0_F\}$	
$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 2x)$	$\text{Im}(u) = \text{Vect}((1, 2))$	
$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, z) \mapsto (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$	$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 2))$	
$D : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P \mapsto P'$	$\text{Im}(D) = \text{Vect}(0, 1, 2X, \dots, (n-1)X^{n-1})$	

**Proposition 3.13** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

- Si  $F$  est de dimension finie alors  $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$ , et

$$\text{rg}(f) = \dim(F) \iff f \text{ est surjective}$$

- Si  $E$  est de dimension finie alors  $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$ , et

$$\text{rg}(f) = \dim(E) \iff f \text{ est injective}$$

- Si  $E$  et  $F$  sont de dimensions finies alors

$$\text{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$$

### 3.5 Énoncé du théorème du rang

**Proposition 3.14 — Théorème du rang.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On suppose  $E$  de dimension finie. Alors

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$$

Cette formule permet de trouver  $\dim(E)$ ,  $\text{rg}(f)$  ou  $\dim(\text{Ker}(f))$  selon les deux valeurs que l'on connaît.

**?** **Méthode 9 - Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire**

- Étape 1 : On commence par déterminer soit le noyau soit l'image de l'application linéaire (grâce aux Méthodes 4, 6 et 7) en choisissant celui qui semble le plus simple (ou celui qui est demandé en premier).
- Étape 2 : On utilise le théorème du rang pour déterminer la dimension de l'autre espace.
- Étape 3 : Puis, on détermine le second ensemble en utilisant l'information sur sa dimension.

**Exemple 3.15** On considère l'application linéaire suivante.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - z, 2x - 2z)$$

Déterminer le noyau, le rang puis l'image de cette application linéaire.

• **Étape 1 : Déterminer le noyau de cette application linéaire (Méthode 4)**

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions de l'équation  $f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$  d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$u \in \text{Ker}(f) \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\iff u = (z, -2z, z)$$

$$\iff u \in \text{Vect}((1, -2, 1))$$

Donc finalement,

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, -2, 1))$$

*Vérification : En particulier, le vecteur  $(1, -2, 1)$  est dans le noyau. On peut vérifier que*

$$f(1, -2, 1) = (0, 0, 0) \quad \checkmark$$

On obtient donc que  $\text{Ker}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 1 car

- la famille  $((1, -2, 1))$  est une famille génératrice de  $\text{Ker}(f)$  par construction,
- la famille  $((1, -2, 1))$  est libre car le vecteur  $(1, -2, 1)$  n'est pas le vecteur nul.

• **Étape 2 : Déterminer la dimension de l'image de cette application linéaire**

- **Étape 3 : Déterminer l'image de cette application linéaire**

**Exemple 3.16** On considère l'application linéaire suivante.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto XP' + P(1) \end{aligned}$$

Déterminer l'image puis le noyau de cette application linéaire.

- **Étape 1 : Déterminer l'image de cette application linéaire (Méthode 7)** Comme la famille  $(1, X, X^2)$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}_2[X]$  (l'espace de départ), on a,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \text{Vect}(1, 1 + X, 1 + 2X^2)$$

Or la famille  $(1, 1 + X, 1 + 2X^2)$  est génératrice de  $\text{Im}(f)$  (par construction) et libre (polynômes de degrés échelonnés) donc c'est une base de  $\text{Im}(f)$  et  $\dim(\text{Im } f) = 3$ .

- **Étape 2 : Déterminer la dimension du noyau de cette application linéaire**

- **Étape 3 : Déterminer le noyau de cette application linéaire**

## 4 Opérations sur les applications linéaires

### 4.1 Combinaisons linéaires

**Proposition 4.1** Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire. Autrement dit,

$$\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in \mathcal{L}(E, F) \quad \mu f + \lambda g \in \mathcal{L}(E, F)$$

Ainsi,  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

*Démonstration.* Soient  $\mu, \lambda$  dans  $\mathbb{R}$  et  $f, g$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , c'est-à-dire deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$ . Montrons que  $\mu f + \lambda g$  est dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , c'est-à-dire montrons que l'application  $h = \mu f + \lambda g$ , qui va de  $E$  dans  $F$ , est linéaire.

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels et  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$ . Montrons que

$$h(au + bv) = ah(u) + bh(v).$$

En utilisant la linéarité de  $f$  et celle de  $g$ , on a

$$\begin{aligned} h(au + bv) &= (\mu f + \lambda g)(au + bv) \\ &= \mu f(au + bv) + \lambda g(au + bv) \\ &= \mu(af(u) + bf(v)) + \lambda(ag(u) + bg(v)) \\ &= a(\mu f(u) + \lambda g(u)) + b(\mu f(v) + \lambda g(v)) \\ &= a(\mu f + \lambda g)(u) + b(\mu f + \lambda g)(v) \\ &= ah(u) + bh(v) \end{aligned}$$

Donc l'application  $h$  est linéaire, c'est-à-dire  $h \in \mathcal{L}(E, F)$ . ■

## 4.2 Composées

**Proposition 4.2** Toute composée d'applications linéaires (si elle est bien définie) est une application linéaire. Autrement dit,

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \quad \forall g \in \mathcal{L}(F, G) \quad g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$$

*Démonstration.* Soient  $f$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $g$  dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$ . Montrons que  $g \circ f$  est dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , c'est-à-dire montrons que l'application  $g \circ f$ , qui va de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  est linéaire.

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels et  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Montrons que

$$(g \circ f)(au + bv) = a(g \circ f)(u) + b(g \circ f)(v).$$

En utilisant la linéarité de  $f$  et celle de  $g$ , on a

$$\begin{aligned} (g \circ f)(au + bv) &= g(f(au + bv)) \\ &= g(af(u) + bf(v)) \\ &= ag(f(u)) + bg(f(v)) \\ &= a(g \circ f)(u) + b(g \circ f)(v) \end{aligned}$$

Donc l'application  $g \circ f$  est linéaire, c'est-à-dire  $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . ■

**Exemple 4.3** Décrivons les composées  $g \circ f$  et  $f \circ g$  des applications linéaires définies par

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 ; (x, y, z) \longmapsto (x - y, 2x + z) \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 ; (x, y) \longmapsto (x + y, 3x - y, -x + 2y)$$

**Proposition 4.4** Soient  $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,

- Composition à droite :  $g_1 \circ (\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda(g_1 \circ f_1) + \mu(g_1 \circ f_2)$
- Composition à gauche :  $(\lambda g_1 + \mu g_2) \circ f_1 = \lambda(g_1 \circ f_1) + \mu(g_2 \circ f_1)$

et ces applications sont linéaires de  $E$  dans  $G$ .

**Proposition 4.5** Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors

$$g \circ f = 0_{E \rightarrow G} \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$$

### 4.3 Puissances d'endomorphismes

**Définition 4.6** Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $k \in \mathbb{N}$ . On note  $f^k$  l'application linéaire de  $E$  dans  $E$  définie par

$$f^0 = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{si } k = 0 \quad \text{et} \quad f^k = f \circ \dots \circ f \quad \text{si } k > 0$$

**Exemple 4.7** On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x - y, x + 3y - z, x + y) \end{aligned}$$

Calculer  $f^2$ .

**Définition 4.8** Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $f$  et  $g$  **commutent** si  $f \circ g = g \circ f$ .

**Théorème 4.9 — Binôme de Newton dans  $\mathcal{L}(E)$ .** Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $f \circ g = g \circ f$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(f \circ g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$$

**Proposition 4.10** Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la quantité  $f^n - g^n$  se factorise de la manière suivante :

$$f^n - g^n = (f - g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-k-1}$$

## 5 Isomorphismes

**Rappel :** Une application  $f : E \longrightarrow F$  est bijective si et seulement s'il existe une application  $g : F \longrightarrow E$  telle que  $g \circ f = \text{id}_E$  et  $f \circ g = \text{id}_F$ . Dans ce cas,  $g$  est unique, noté  $f^{-1}$  et appelée **bijection réciproque de  $f$**  (ou encore **réciproque** ou **inverse**). De plus,  $f^{-1} : F \longrightarrow E$  est bijective, de bijection réciproque  $f$ .

### 5.1 Définitions et propriétés

**Définition 5.1** Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est un **isomorphisme** de  $E$  sur  $F$  si

- $$\begin{cases} \textcircled{1} f \text{ est une application linéaire} \\ \textcircled{2} f \text{ est bijective de } E \text{ dans } F. \end{cases}$$

**Proposition 5.2** Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  deux isomorphismes. Alors

- $g \circ f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $G$ , d'inverse  $f^{-1} \circ g^{-1}$  :

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E, G) \quad \text{et} \quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

- $f^{-1}$  est un isomorphisme de  $F$  sur  $E$ , d'inverse  $f$  :

$$f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E) \quad \text{et} \quad (f^{-1})^{-1} = f$$

**Exemple 5.3** Montrons que l'application  $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] ; P \longmapsto P(X + 1)$  est un isomorphisme et déterminons son inverse.

## 5.2 Lorsque l'ensemble de départ et d'arrivée sont les mêmes

**Définition 5.4** Soit  $f : E \longrightarrow E$  une application. On dit que  $f$  est un **automorphisme de  $E$**  si

- $$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} f \text{ est une application linéaire} \\ \textcircled{2} \text{ pour tout } \vec{x} \in E, f(\vec{x}) \in E \\ \textcircled{3} f \text{ bijective de } E \text{ dans } E. \end{array} \right.$$

Autrement dit, un automorphisme de  $E$  est un endomorphisme bijectif de  $E$ . On note  $GL(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ , appelé **groupe linéaire de  $E$** .

### Proposition 5.5

- $\text{id}_E \in GL(E)$  et  $\text{id}_E^{-1} = \text{id}_E$
- Pour tout  $f \in GL(E)$ ,  $f^{-1} \in GL(E)$  et  $(f^{-1})^{-1} = f$
- Pour tout  $f, g \in GL(E)$ ,  $f \circ g \in GL(E)$  et  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ .

**Exemple 5.6** Montrons que l'application  $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] ; P \longmapsto P(X+1)$  est un automorphisme.

**Exemple 5.7** Soit  $\lambda \neq 0$ . Montrer que l'homothétie de rapport  $\lambda$  est un automorphisme de  $E$ .

**Exemple 5.8** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 ; (x, y) \longmapsto (x+y, x-y)$ . Montrons que  $f$  un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$  et déterminons sa bijection réciproque.

### 5.3 Isomorphismes et bases

**Proposition 5.9** Supposons de  $E$  de dimension  $n$ . Soit  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $E$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- $f$  est injective  $\iff (f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  est libre dans  $F$ .
- $f$  est surjective  $\iff (f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  est génératrice de  $F$
- $f$  est un isomorphisme  $\iff (f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  est une base de  $F$ .

*Démonstration.*

- Montrons l'équivalence;
  - Supposons  $f$  injective. Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $\lambda_1 f(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}_F$ . Alors  $f(\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n) = \vec{0}_F$ . Or  $f$  est injective, donc  $\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}_E$ . La famille  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  étant une base donc une famille libre,  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Donc  $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  est libre dans  $F$ .
  - Réciproquement, supposons  $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  libre dans  $F$ . Soit  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i \in \text{Ker}(f)$ . On a  $f(\vec{x}) = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i) = \vec{0}_F$ . Donc, par linéarité de  $f$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(\vec{e}_i) = \vec{0}_F$ . Donc, par liberté de  $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ ,  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Donc  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}_E$ . Donc  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$ , et  $f$  est donc injective.
- On a  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ , donc  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Vect}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)) = F$ , soit si et seulement si  $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  est génératrice de  $F$ .
- Conséquence immédiate des deux premiers points. ■

La proposition suivante permet de montrer facilement le caractère bijectif d'un endomorphisme en dimension finie.

**Proposition 5.10** Soient  $E$  et  $F$  de dimension finie. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} f \text{ est bijective de } E \text{ dans } F \\ \textcircled{2} \dim(E) = \dim(F) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} f \text{ est injective} \\ \textcircled{2} \dim(E) = \dim(F) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} f \text{ est surjective} \\ \textcircled{2} \dim(E) = \dim(F) \end{array} \right\}$$

*Démonstration.* Soit  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $E$ . Comme  $F$  est de dimension  $n$ , une famille libre ou génératrice à  $n$  éléments est une base de  $F$ . Donc  $f$  est injective ssi  $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  est libre de  $F$  ssi  $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$  est génératrice de  $F$  ssi  $f$  est surjective. ■

⚠ Les *trois* hypothèses sont indispensables : application linéaire,  $E$  et  $F$  de dimension finie,  $E$  et  $F$  de même dimension.

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; x \longmapsto e^x$  est non linéaire entre deux espaces de même dimension finie, injective et non surjective
- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} ; (x, y) \longmapsto x$  est linéaire, les dimensions sont différentes et  $f$  est surjective et non injective
- $f : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] ; P \longmapsto P'$  est linéaire, les dimensions ne sont pas finies et  $f$  est surjective et non injective.

La proposition suivante est un corolaire immédiat, dans le cas où les espaces de départ et d'arrivée sont carrément les mêmes.

**Proposition 5.11** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} f \text{ est bijective de } E \text{ dans } E \\ \textcircled{2} E \text{ de dimension finie} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} f \text{ est injective} \\ \textcircled{2} E \text{ de dimension finie} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} f \text{ est surjective} \\ \textcircled{2} E \text{ de dimension finie} \end{array} \right.$$

**?** De cette proposition, on obtient que si  $E$  est de dimension finie, un endomorphisme  $f$  de  $E$  inversible à droite ou à gauche est inversible. De plus, l'inverse à gauche et l'inverse à droite sont égaux à  $f^{-1}$ .

**Exemple 5.12** On considère l'application linéaire suivante.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + y, -x + y, z)$$

Montrer que cette application linéaire est bijective.

## 5.4 Espaces isomorphes

**Définition 5.13** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels. On dit que  $E$  et  $F$  sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme (c'est-à-dire une application linéaire bijective) de  $E$  sur  $F$ .

Ce sont ces isomorphismes qui nous permettent de faire des «identifications abusives» (confusion entre deux objets mathématiques de nature a priori différentes), comme par exemple confondre les vecteurs colonnes avec les vecteurs lignes.

**Exemple 5.14** Montrer que les espaces  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  sont isomorphes.

**Exemple 5.15** Montrer que les espaces  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $\mathbb{R}^3$  sont isomorphes.

**Proposition 5.16 — Isomorphismes et dimension.**

- Si  $E$  est de dimension finie et si  $F$  est isomorphe à  $E$  alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim(F) = \dim(E)$ .
- Si  $E$  et  $F$  sont de même dimension finie alors  $E$  et  $F$  sont isomorphes.

Pour montrer que  $E$  est de dimension finie  $n$ , on peut ainsi exhiber un isomorphisme avec un espace dont on sait qu'il est de dimension  $n$ .

**Exemple 5.17** Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des fonctions réelles définies sur  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  solutions de  $ay'' + by' + cy = 0$ . Montrer que  $\mathcal{S}$  est de dimension 2.

On peut montrer par un argument similaire la propriété suivante.

**Proposition 5.18** Supposons  $E$  et  $F$  de dimension finie. Alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

## 6 Conséquences sur le rang et théorème du rang

Le rang ne peut que diminuer par composition.

**Proposition 6.1 — Rang et composition.** Supposons  $E, F$  et  $G$  de dimension finie. Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors  $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$ .

*Démonstration.*

- $\text{Im}(g \circ f) = (g \circ f)(E) = g(f(E)) \subset g(F)$ . Donc  $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$ .
- $\text{Im}(g \circ f) = (g \circ f)(E) = g(f(E)) = g(\text{Im}(f))$ . Donc  $\text{rg}(g \circ f) \leq \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f)$ .

■

Le rang est conservé par composition avec un isomorphisme.

**Proposition 6.2 — Invariance du rang par composition par un isomorphisme.** Supposons  $E, F, G$  et  $H$  de dimension finie. Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  et  $h \in \mathcal{L}(H, E)$  sont des isomorphismes alors

$$\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) \quad \text{et} \quad \text{rg}(f \circ h) = \text{rg}(f).$$

*Démonstration.*

- $\text{Im}(f \circ h) = (f \circ h)(H) = f(h(H)) = f(E)$  car  $h$  est surjective donc  $h(H) = E$ . Donc  $\text{rg}(f \circ h) = \text{rg}(f)$ .
- Par bijectivité de  $g$ ,  $g(\text{Im}(f))$  est isomorphe à  $\text{Im}(f)$  et les deux espaces ont donc même dimension. Or  $\text{Im}(g \circ f) = g(f(E)) = g(\text{Im}(f))$ . Donc  $\text{rg}(g \circ f) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f)$ .

On en déduit de cette proposition par exemple que toute opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice ne modifie pas le rang. En effet, effectuer une opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes revient à multiplier à gauche ou à droite par une matrice inversible.

**Proposition 6.3 — Forme géométrique du théorème du rang.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $S$  est un supplémentaire de  $\text{Ker}(f)$  dans  $E$  alors  $f$  induit un isomorphisme de  $S$  sur  $\text{Im}(f)$ . Plus précisément,  $f|_S : S \rightarrow \text{Im}(f)$ ;  $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$  est un isomorphisme de  $S$  sur  $\text{Im}(f)$ .

*Démonstration.*

- $f|_S$  est linéaire car  $f$  l'est.
- Montrons que  $f|_S$  est injective. Soit  $\vec{x} \in \text{Ker}(f|_S)$ . Alors  $\vec{x} \in S$  et  $f|_S(\vec{x}) = f(\vec{x}) = \vec{0}_F$ . Donc  $\vec{x} \in S \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$  car  $E = S \oplus \text{Ker}(f)$ . Donc  $\text{Ker}(f|_S) = \{\vec{0}_E\}$  et  $f|_S$  est injective.
- Montrons que  $f|_S$  est surjective. Soit  $\vec{y} \in \text{Im}(f)$ . Alors il existe  $\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_0 \in E$  avec  $\vec{x}_S \in S$  et  $\vec{x}_0 \in \text{Ker}(f)$  tel que  $\vec{y} = f(\vec{x})$ . Donc  $\vec{y} = f(\vec{x}_S + \vec{x}_0) = f(\vec{x}_S) + f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_S)$  puisque  $\vec{x}_0 \in \text{Ker}(f)$ . D'où  $\vec{y} = f|_S(\vec{x}_S)$  avec  $\vec{x}_S \in S$ . Donc  $f|_S$  est surjective.
- Injective et surjective,  $f|_S$  est donc bijective. Comme  $f|_S$  est linéaire, c'est un isomorphisme.

De cette proposition, on peut effectuer la preuve du théorème du rang vu précédemment.

**Théorème 6.4 — Théorème du rang.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels. Si  $E$  est de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  alors

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$$

- ⚠ En général, pour  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\text{Im}(u)$  et  $\text{Ker}(u)$  ne sont pas supplémentaires ! Ils le sont si et seulement si  $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$ .

*Démonstration.* Supposons  $E$  de dimension finie. Alors  $\text{Ker}(f)$  admet un supplémentaire  $S$  dans  $E$  :  $E = S \oplus \text{Ker}(f)$ . Donc  $\dim(E) = \dim(S) + \dim(\text{Ker}(f))$ . Or d'après la proposition précédente,  $\text{Im}(f)$  et  $S$  sont isomorphes, donc  $\text{rg}(f) = \dim(S)$ . D'où le résultat.

## 7 Équations linéaires

**Définition 7.1** On appelle **équation linéaire** toute équation de la forme

$$f(\vec{x}) = \vec{b}$$

d'inconnue  $\vec{x}$  où  $f$  est une *application linéaire* de  $E$  vers  $F$  et  $\vec{b} \in F$ .

**Exemple 7.2**

- Le système d'équations linéaires  $AX = B$  où  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathbb{K}^n$  et  $X \in \mathbb{K}^p$  est une équation linéaire avec

$$f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n ; X \mapsto AX$$

- L'équation différentielle linéaire d'ordre 1  $y' + a(t)y = b(t)$  est une équation linéaire avec

$$f : \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) ; y \longmapsto y' + a(t)y$$

- L'équation différentielle linéaire d'ordre 2  $ay'' + by' + cy = b(t)$  est une équation linéaire avec

$$f : \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) ; y \longmapsto ay'' + by' + cy$$

- Les suites arithmético-géométriques telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = au_n + b$  vérifient une équation linéaire avec

$$f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ; (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1} - au_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

On retrouve le **principe de superposition** pour une équation linéaire et la décomposition associée :  
Solution générale = Solution particulière + Solution homogène

**Proposition 7.3 — Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\vec{b} \in F$ .

- L'ensemble  $\mathcal{S}_h$  des solutions de l'équation homogène  $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$  est

$$\mathcal{S}_h = \text{Ker}(f)$$

C'est donc un sous-espace vectoriel.

- L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de  $f(\vec{x}) = \vec{b}$  est

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \vec{b} \notin \text{Im}(f) \\ \vec{x}_0 + \mathcal{S}_h & \text{où } x_0 \text{ est une solution particulière de } f(\vec{x}) = \vec{b} \end{cases}$$