4. Fonctions bijectives

1 Notion de bijection

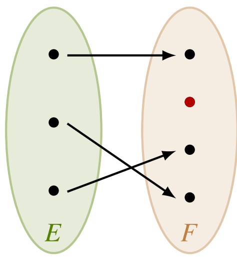
Dans cette partie, I et J désignent deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 Soit $f : I \to J$ une fonction. On dit que f est **bijective de I sur J** si tout élément $y \in J$ (de l'espace d'arrivée) admet un *unique* antécédent $x \in I$ (de l'espace de départ) par f, autrement dit,

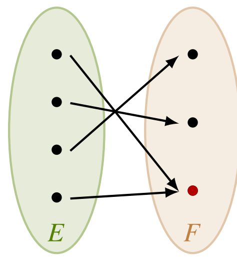
$$\forall y \in J \text{ (de l'espace d'arrivée) }, \quad \exists! x \in I \text{ (de l'espace de départ)}, \quad y = f(x).$$

Autrement dit, pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in I$ admet une *unique* solution.

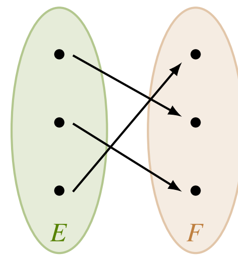
Exemple 1.2 Ci-dessous sont représentées trois fonctions de E vers F. Déterminer si ces fonctions sont bijectives de E vers F.



La fonction n'est pas bijective de E vers F : un élément de l'espace d'arrivée n'admet pas d'antécédent.

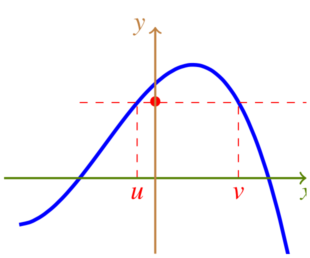


La fonction n'est pas bijective de E vers F : un élément de l'espace d'arrivée admet deux antécédents.

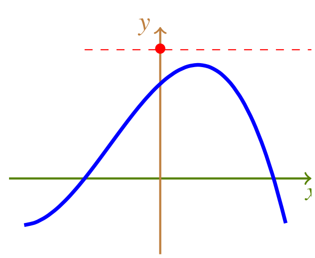


La fonction est bijective de E vers F : tout élément de F admet un unique antécédent dans E.

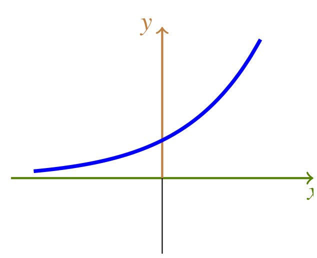
Exemple 1.3 Ci-dessous est représenté le graphe de trois fonctions de E vers F. Déterminer si ces fonctions sont bijectives de E vers F.



La fonction n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: un élément de l'espace d'arrivée admet deux antécédents.



La fonction n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: un élément de l'espace d'arrivée n'admet pas d'antécédent.



La fonction est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$: tout élément de $\mathbb{R}_+^*$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.4 Soit $f : I \to J, x \mapsto x^2$. Déterminer selon les intervalles I et J si la fonction carrée est bijective de I vers J.

Ens. de départ	Ens. d'arrivée	f bijective de I vers J ?
$I = \mathbb{R}$	$J = \mathbb{R}$	Non : $-1 \in J = \mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent dans $I = \mathbb{R}$.
$I = \mathbb{R}$	$J = \mathbb{R}_+$	Non : $4 \in J = \mathbb{R}_+$ admet 2 antécédents dans $I = \mathbb{R}$ (qui sont 2 et -2).
$I = \mathbb{R}_+$	$J = \mathbb{R}_+$	Oui : $\forall y \in J = \mathbb{R}_+$, $\exists! x = \sqrt{y} \in I = \mathbb{R}_+$ tel que $y = x^2$.

Exemple 1.5 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 6$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrons que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une *unique* solution. Pour cela, on va résoudre l'équation **par équivalence**. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y = 2x + 6 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = y - 6 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{y-6}{2}$$

Ainsi, tout élément $y \in \mathbb{R}$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$.

Vérification. Par exemple, notre raisonnement donne que l'élément $8 \in \mathbb{R}$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ qui vaut 1 :

$$f(1) = 2 \times 1 + 6 = 8 \qquad \checkmark$$

Définition 1.6 — Bijection réciproque. Soit $f : E \to F$ bijective. Alors, la bijection réciproque est l'application qui, à un élément y de F, associe l'unique antécédent de y par f dans E, noté x,

$$\begin{array}{rccl} f^{-1} : & F & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & x \text{ tel que } y = f(x) \end{array}$$

De plus, pour tout $x \in E$ et $y \in F$, on a

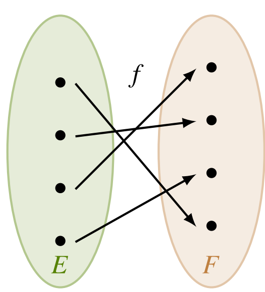
$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Proposition 1.7 Soit $f : I \to J$ une bijection de I sur J.

- Pour tout $x \in I$, $f^{-1}(f(x)) = x$.
- Pour tout $y \in J$, $f(f^{-1}(y)) = y$.

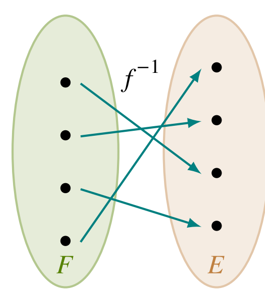
Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple 1.8 Ci-dessous est représentée une fonction bijective de $\{1, 2, 3, 4\}$ vers $\{1, 2, 3, 4\}$. Représenter sa fonction bijection réciproque.



On sait que

$f(1) = 4$
$f(2) = 2$
$f(3) = 1$
$f(4) = 3$



On sait que

$f^{-1}(1) = 3$
$f^{-1}(2) = 2$
$f^{-1}(3) = 4$
$f^{-1}(4) = 1$

Méthode 1 - Montrer la bijectivité et déterminer f^{-1}

Pour déterminer si une fonction $f : I \to J$ est bijective, on peut résoudre, pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in I$ (cela signifie que l'on essaie d'isoler x en fonction de y). Si, pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x dans I, alors f est bijective de I sur J et l'expression de la solution donne l'expression de f^{-1}.

Exemple 1.9 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto \dfrac{3x-5}{x+2}$ est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et déterminer sa bijection réciproque.

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Montrons que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ admet une *unique* solution. Pour cela, on va résoudre l'équation par équivalence. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

$$\begin{aligned}
f(x) = y \iff & \quad \frac{3x-5}{x+2} = y \\
\iff & \quad 3x - 5 = xy + 2y \\
\iff & \quad x(3-y) = 2y + 5 \\
\iff & \quad x = \frac{2y+5}{3-y} \text{ car } y \neq 3.
\end{aligned}$$

Ainsi, tout élément $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. La fonction f est donc bijective de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, de bijection réciproque

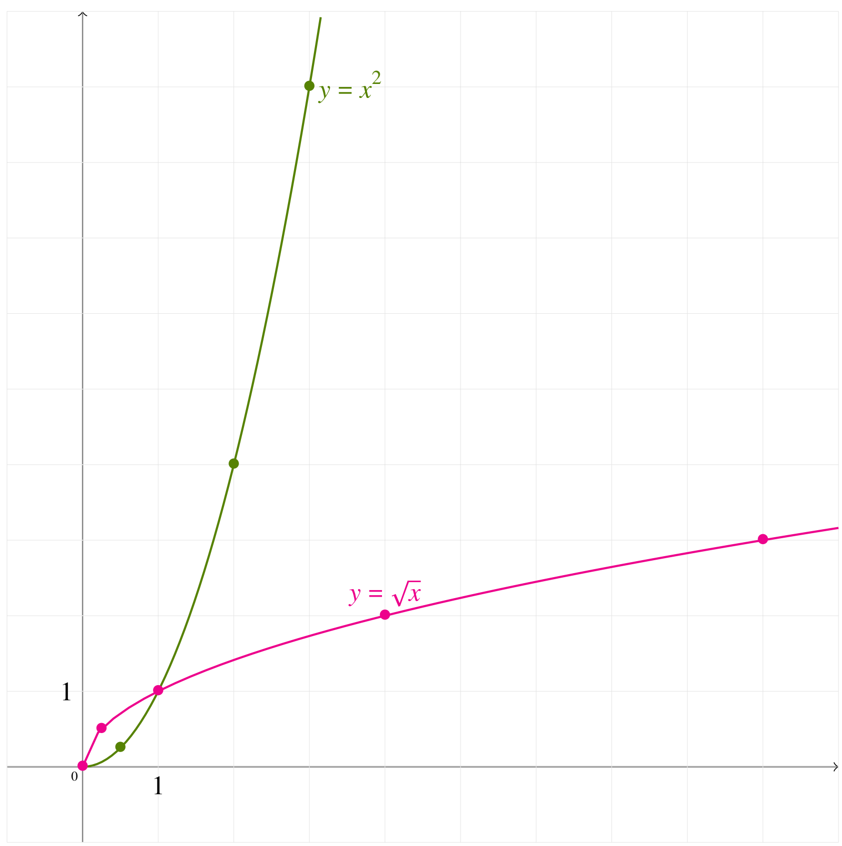
$$\begin{array}{rccc}
f^{-1} & : \mathbb{R} \setminus \{3\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\
 & y & \mapsto & \frac{2y+5}{3-y}
\end{array}$$

Vérification. On peut vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\},\ \ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3x-5}{x+2}\right) = \frac{2 \times \frac{3x-5}{x+2} + 5}{3 - \frac{3x-5}{x+2}} = \frac{2(3x-5)+5(x+2)}{3(x+2)-(3x-5)} = x \qquad \checkmark$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{3\},\ \ f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{2y+5}{3-y}\right) = \frac{3 \times \frac{2y+5}{3-y} - 5}{\frac{2y+5}{3-y} + 2} = y \qquad \checkmark$$

Exemple 1.10 Ci-dessous est représenté le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ qui est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ Tracer l'allure de sa bijection réciproque. Que reconnaît-on ?



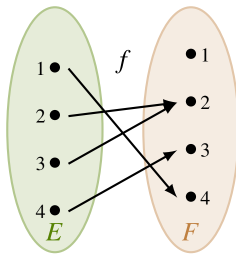
2 Théorème de la bijection

2.1 Image directe

Définition 2.1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **image directe de I par** f, notée $f(I)$, l'ensemble des images des éléments x appartenant à I :

$$f(I) = \{f(x) | x \in I\}$$

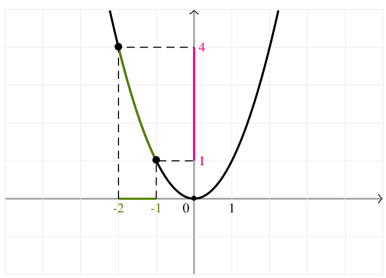
Exemple 2.2 Déterminer graphiquement l'image directe des ensembles suivants par l'application f représentée.



- L'image de $\{1,2\}$ est $f(\{1,2\}) = \{2,4\}$
- L'image de $\{1,2,3\}$ est $f(\{1,2,3\}) = \{2,4\}$
- L'image de $\{1,2,3,4\}$ est $f(\{1,2,3,4\}) = \{2,3,4\}$

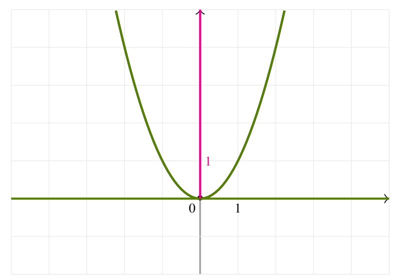
Graphiquement, pour obtenir $f(I)$, on projette sur l'axe des ordonnées la portion du graphe qui est «au-dessus» de I.

Exemple 2.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Déterminer l'image directe de $[-2,-1[$ et de $\mathbb{R}$ par la fonction f.



L'image de $[-2,-1[$ par f est

$f([-2,-1[) =]1,4]$



L'image de $\mathbb{R}$ par f est

$f(\mathbb{R}) = [0,+\infty[$

On peut aussi utiliser un tableau de variations pour déterminer l'image d'un intervalle par une fonction f.

Exemple 2.4 Déterminer $f(\mathbb{R})$ où

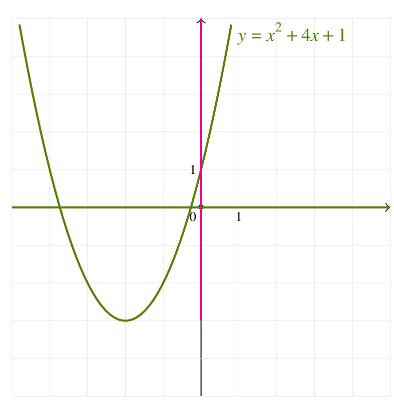
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 4x + 1 \end{array}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) donc on peut déduire ses variations grâce au signe de sa dérivée de la manière suivante.

x	0		-2		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que

$$f(\mathbb{R}) = [-3,+\infty[$$



Lorsque f est **strictement monotone** sur I, $f(I)$ est un intervalle qui se détermine encore plus facilement en calculant les valeurs ou les limites de f aux bornes de I.

	f croissante	f décroissante
$I = [a,b]$	$J = [f(a), f(b)]$	$J = [f(b), f(a)]$
$I =]a,b]$	$J = \left] \lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \right[$
$I = [a,b[$	$J = \left[f(a), \lim\limits_{x\to b-} f(x) \right[$	$\left] \lim\limits_{x\to b^-} f(x), f(a) \right]$
$I =]a,b[$	$J = \left] \lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b-} f(x) \right[$	$\left] \lim\limits_{x\to b-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \right[$

Exemple 2.5 Déterminer les images directes suivantes.

Fonction	Intervalle I	Valeurs/Limites aux bornes	$f(I)$
$x \mapsto x^2$	$]1,2]$	$f(1) = 1$ et $f(2) = 4$	$f([1,2]) = [1,4]$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]0,1]$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $f(1) = 1$	$f(]0,1]) = [1,+\infty[$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$	$\lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp(x) = +\infty$	$f(\mathbb{R}) =]0,+\infty[$
$x \mapsto x^2$	$[-1,3]$	$f(-1) = 1$ et $f(3) = 9$	Attention ! $f([-1,3]) = [0,9]$

2.2 Théorème de la bijection

Le théorème suivant permet de justifier très simplement qu'une fonction est bijective, sans avoir besoin de résoudre l'équation $f(x) = y$. Cependant, ce théorème ne donne pas l'expression de la fonction bijection réciproque.

Proposition 2.6 — Théorème de la bijection. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On suppose que
① L'ensemble I est un **intervalle**.
② f est **continue** sur I,
③ f est **strictement monotone** sur I.
Alors,
- La fonction f réalise une bijection de I sur l'*intervalle* $J = f(I)$.
- Sa fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone sur J, de même sens de variations que f.

? **Méthode 2 - Prouver qu'une fonction est bijective de ... vers ...**
Pour montrer qu'une fonction définie sur un intervalle I est bijective, on peut appliquer le théorème de la bijection en vérifiant les trois points du théorème et en déterminant $J = f(I)$. Attention cependant, on n'obtient pas l'expression explicite de la bijection réciproque. Si on veut l'obtenir, il faut résoudre, pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in I$ comme vu précédemment.

Exemple 2.7 Soit f la fonction définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$. Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[-1,0]$ sur un intervalle J à déterminer.

① L'ensemble $[-1,0]$ est un **intervalle**.
② La fonction f est **continue** sur $[-1,0]$.
③ Montrons que la fonction f est **strictement croissante** sur $[-1,0]$.
La fonction est dérivable sur $[-1,0]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 + 1 > 0.$$

Donc, la fonction f est strictement croissante sur $[-1,0]$

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une bijection de $[-1,0]$ sur $f([-1,0]) = [-1,1]$.

Méthode 3 - Prouver l'existence et l'unicité d'une solution

Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour montrer qu'une équation de la forme $f(x) = y$ d'inconnue $x \in I$ admet une unique solution, on peut procéder comme suit.

1. On justifier avec le *théorème* de la bijection que f réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle $J = f(I)$ à déterminer.
2. On vérifie que $y \in J$. Ainsi, par bijectivité de f de I sur J, on en déduit qu'il existe un unique $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = y$.

Exemple 2.8 Montrer que l'équation $\ln(x) = x - 3$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$.

On cherche à montrer

$$\exists! x \in [1, +\infty[, \quad \ln(x) - x + 3 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) - x + 3 \end{array}$$

On cherche alors à montrer que

$$\exists! x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = 0.$$

① L'ensemble $[1, +\infty[$ est un **intervalle**.
② La fonction f est **continue** sur $[1, +\infty[$.
③ Montrons que la fonction f est **strictement décroissante** sur $[1, +\infty[$
La fonction est dérivable sur $[1, +\infty[$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} < 0 \text{ sauf pour } x = 1$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[) =]-\infty, 2]$. Autrement dit,

$$\forall y \in]-\infty, 2], \ \exists! x \in [1, +\infty[, \ f(x) = y.$$

En particulier, en prenant $y = 0 \in]-\infty, 2]$, il existe un unique $x \in [1, +\infty[$ tel que $f(x) = 0$, c'est-à-dire il existe un unique $x \in [1, +\infty[$ tel que $\ln(x) = x - 3$.

2.3 Propriétés de f^{-1} (quand elle existe)

Proposition 2.9 — Continuité de f^{-1}. Soit $f : I \to J$ une fonction.
On suppose que
① La fonction f est **bijective** de I sur J.
② La fonction f est **continue** sur I
Alors, la fonction f^{-1} est continue sur J.

Proposition 2.10 — Dérivabilité de f^{-1}. Soit $f : I \to J$ une fonction.
On suppose que
① La fonction f est **bijective** de I sur J.
② La fonction f est **dérivable** sur I.
③ La fonction f' ne **s'annule pas** sur I.
Alors, la fonction f^{-1} (existe et) est dérivable sur J et

$$\forall x \in J, \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exemple 2.11 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + x + 1$. On peut montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (admis). Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'équation de la tangente à f^{-1} en 1.

On sait

① La fonction f est **bijective** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (admis).
② La fonction f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.
③ La fonction f' ne **s'annule pas** sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0$$

Donc, d'après le théorème du cours, la fonction bijection réciproque f^{-1} (existe et) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{3(f^{-1}(x))^2 + 1}$$

L'équation de la tangente à f^{-1} en 1 est donnée par

$$y = (f^{-1})'(1)(x-1) + f^{-1}(1)$$

Or, $f(0) = 1$ donc $f^{-1}(1) = 0$ et d'après la formule précédente,

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3(f^{-1}(1))^2 + 1} = 1$$

On en déduit que l'équation de la tangente à f^{-1} en 1 est donnée par

$$y = x - 1$$

3 Les fonctions exponentielle et logarithme

3.1 La fonction logarithme

Définition 3.1 La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est l'unique primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. Autrement dit, on a

$$\forall x > 0, \qquad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Proposition 3.2 — Propriétés de la fonction logarithme.

1. Le domaine de définition du logarithme est $]0, +\infty[$.
2. La fonction logarithme n'admet pas de majorant, ni de minorant sur $]0, +\infty[$.
3. La fonction logarithme est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\text{pour tout } x > 0, \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

4. La fonction logarithme est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Preuve de 4). La fonction logarithme est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\text{pour tout } x > 0, \qquad f'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

Donc, la fonction logarithme est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. ∎

Proposition 3.3 — Limites et équivalent. On a,

- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

Proposition 3.4 — Valeurs particulières.

1. Par définition, on a $\ln(1) = 0$.
2. Il existe un unique réel $\mathrm{e} \in]0, +\infty[$ tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$ (en fait $\mathrm{e} \approx 2.72$).

Preuve de 2). On cherche à montrer que

$$\exists ! \mathrm{e} \in]0, +\infty[, \quad \ln(\mathrm{e}) = 1$$

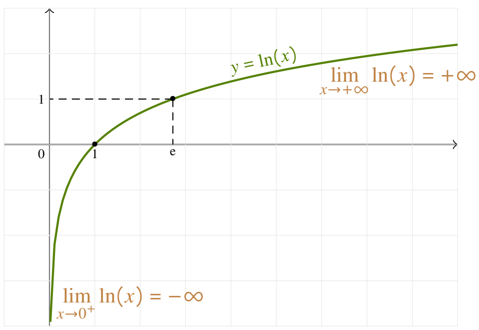
On commence par appliquer le théorème de la bijection à la fonction logarithme sur $]0, +\infty[$. On sait que

① L'ensemble $]0, +\infty[$ est un **intervalle**.
② La fonction logarithme est **continue** sur $]0, +\infty[$.
③ La fonction logarithmeest **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction logarithme réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers $]-\infty, +\infty[$, autrement dit

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists ! x \in]0, +\infty[, \quad y = \ln(x)$$

En particulier, en prenant $y = 1 \in \mathbb{R}$, on obtient le résultat. ■



x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Proposition 3.5 — Relation fondamentale. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y).$$

Démonstration. Soit $y > 0$. On considère la **fonction auxiliaire** $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x > 0, \qquad \varphi(x) = \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$$

Alors, la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \qquad \varphi'(x) = y \times \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} = 0$$

Donc, la fonction φ est constante sur $]0, +\infty[$:

$$\forall x > 0, \qquad \varphi(x) = \varphi(1) = 0$$

D'où le résultat. ■

Proposition 3.6 — Propriétés algébriques. Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

a. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

b. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

c. $\ln(x^n) = n \ln(x)$

d. $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$

Démonstration. Prouvons la première propriété. Soit $x \in]0, +\infty[$. *Comme* $\frac{1}{x}$ *est dans* $]0, +\infty[$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ *est bien défini.* De plus, en utilisant la relation de la Proposition 3.5, on a

$$\ln(1) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or $\ln(1) = 0$ donc on obtient

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$

■

Exemple 3.7 Écrire $\ln(12)$ et $\ln\left(\frac{16}{3}\right)$ sous la forme $a\ln(2)+b\ln(3)$ (avec a et b des entiers relatifs).

En décomposant en produits le nombre à l'intérieur du logarithme, on obtient,

$$\begin{aligned}\ln(12) &= \ln(2^2\times 3) = \ln(2^2)+\ln(3) = 2\ln(2)+\ln(3)\\ \ln\left(\tfrac{16}{3}\right) &= \ln(16)-\ln(3) = \ln(2^4)-\ln(3) = 4\ln(2)-\ln(3)\end{aligned}$$

Exemple 3.8 Simplifier au maximum le nombre

$$A = \frac{1}{2}\ln(125)-2\ln(5)+\ln(\sqrt{5})$$

- **Première manière de faire (en «séparant au maximum les logarithmes»).** On a,

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\ln(125)-2\ln(5)+\ln(\sqrt{5})\\ &= \frac{1}{2}\ln(5^3)-2\ln(5)+\ln(5^{\frac{1}{2}})\\ &= \frac{3}{2}\ln(5)-2\ln(5)+\frac{1}{2}\ln(5)\\ &= 0\end{aligned}$$

- **Deuxième manière de faire (en «regroupant au maximum les logarithmes»).** On a,

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\ln(125)-2\ln(5)+\ln(\sqrt{5})\\ &= \ln(\sqrt{125})-\ln(5^2)+\ln(\sqrt{5})\\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{125}\times\sqrt{5}}{5^2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{5^3}\times\sqrt{5}}{5^2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{5\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{5^2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{5\times 5}{5^2}\right)\\ &= \ln(1)\\ &= 0\end{aligned}$$

Exemple 3.9 Résoudre l'équation $\ln(4x-1) = \ln(2-x)$ d'inconnue x en précisant au préalable le domaine de validité de cette équation.

- Cette équation est licite si et seulement si

$$4x-1>0 \qquad \text{et} \qquad 2-x>0$$

c'est-à-dire

$$x>\frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad x<2$$

Donc, cette équation est valable sur l'intervalle $\left]\frac{1}{4},2\right[$.

- Soit $x \in \left]\frac{1}{4}, 2\right[$. En raisonnant par équivalence, on obtient,

$$\begin{aligned} \ln(4x-1) = \ln(2-x) &\iff 4x-1 = 2-x && \text{par bijectivité du log} \\ &\iff 5x = 3 \\ &\iff x = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Finalement, cette équation admet une unique solution donnée par $\frac{3}{5}$.

Vérification.

$$\text{D'une part, } \ln\left(4 \times \frac{3}{5} - 1\right) = \ln\left(\frac{7}{5}\right) \qquad \text{et d'autre part, } \ln\left(2 - \frac{3}{5}\right) = \ln\left(\frac{7}{5}\right) \qquad \checkmark$$

3.2 La fonction exponentielle

Définition 3.10 La fonction logarithme réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. On appelle **fonction exponentielle**, noté exp, la bijection réciproque du logarithme népérien :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$$

Proposition 3.11 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0, +\infty[$. On a

$$\ln(t) = x \qquad \iff \qquad t = \exp(x).$$

En particulier,

$$\begin{array}{ll} \text{pour tout } t \text{ dans }]0, +\infty[, & \exp(\ln(t)) = t \\ \text{pour tout } y \text{ dans } \mathbb{R}, & \ln(\exp(y)) = y \end{array}$$

Proposition 3.12 — Propriétés de la fonction exponentielle.

1. Le domaine de définition de la fonction exponentielle est $\mathbb{R}$.
2. La fonction exponentielle n'admet pas de majorant sur $\mathbb{R}$ mais est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad \exp'(x) = \exp(x)$$

4. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve de 3) et 4). On sait

① La fonction logarithme est **bijective** de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

② La fonction logarithme est **dérivable** sur $]0, +\infty[$.

③ La dérivée du logarithme ne **s'annule pas** sur $]0, +\infty[$ car

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$$

Donc, d'après le théorème du cours, la fonction bijection réciproque du logarithme, qui est la fonction exponentielle, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\exp)'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x) > 0$$

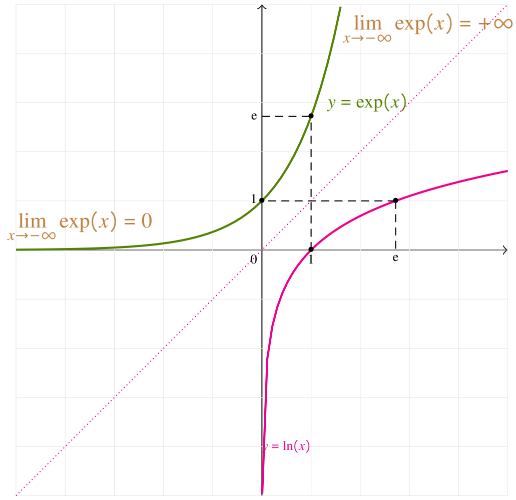
Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ■

Proposition 3.13 — Valeurs particulières.

1. On a $\exp(0) = 1$ — car $\ln(1) = 0$
2. On a $\exp(1) = \mathrm{e}$ (on rappelle que $\mathrm{e} \approx 2.72$) — car $\ln(\mathrm{e}) = 1$

Proposition 3.14 — Limites et équivalent.

1. On a $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
2. On a $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ car $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
3. On a $\exp(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $\exp(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Proposition 3.15 — Relation fondamentale. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Démonstration. Soient x et y deux nombres réels. On a,

$$\ln(\exp(x) \times \exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y$$

Donc, en «passant à l'exponentielle», comme la fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme, on obtient,

$$\exp(x) \times \exp(y) = \exp(x+y)$$

■

Proposition 3.16 — Propriétés algébriques. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \qquad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}, \qquad \exp(nx) = (\exp(x))^n$$

Ces propriétés algébriques sont les mêmes que pour les puissances, cela justifie la notation $\exp(x) = \mathrm{e}^x$:

$$\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}, \qquad (\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}, \qquad \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y}, \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}.$$

Exemple 3.17 Écrire $\mathrm{e}^5\mathrm{e}^{-4}\mathrm{e}^2$ et $\frac{1}{\mathrm{e}^6\mathrm{e}^4}$ sous la forme e^k avec k le plus simple possible.

$$\mathrm{e}^5\mathrm{e}^{-4}\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^{5-4+2} = \mathrm{e}^3.$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}^6\mathrm{e}^4} = \mathrm{e}^{-6}\mathrm{e}^{-4} = \mathrm{e}^{-6-4} = \mathrm{e}^{-10}$$

Exemple 3.18 Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer l'expression $(4\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^2$ et factoriser $\mathrm{e}^{9x} + \mathrm{e}^{2x}$ par e^{2x}.

$$(4e^{x} + e^{-x})^2 = (4e^{x})^2 + 2 \times 4e^{x}e^{-x} + (e^{-x})^2 = 16e^{2x} + 8 + e^{-2x}$$

$$e^{9x} + e^{2x} = e^{7x+2x} + e^{2x} = e^{7x}e^{2x} + e^{2x} = e^{2x}(e^{7x} + 1).$$

Exemple 3.19 Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $\exp(2x) = \exp(x^2)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Raisonnons **par équivalence**. On a,

$$\begin{aligned} \exp(x) = \exp(x^2) &\iff x = x^2 \text{ par bijectivité de exp} \\ &\iff x(x-1) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

L'équation admet donc deux solutions dans $\mathbb{R}_+$ qui sont 0 et 1.