

# TD 29 – Applications Linéaires

## 1 Linéarité d'une application

**Exercice 1** – Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Lesquelles sont des endomorphismes ? des formes linéaires ?

$$a) f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (2x - y, -x + 3y)$$

$$b) f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{2}$$

$$c) f_3 : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_0^1 f(t) dt$$

$$d) f_4 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto XP'$$

**Exercice 2** – Montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires.

$$a) f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + 2z, y, 1)$$

$$b) f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x^3$$

$$c) f_3 : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ (P, Q) \longmapsto PQ$$

**Exercice 3** – **Représentation via une base.** Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que les images des vecteurs de la base canonique soient  $u((1, 0, 0)) = (1, -1, 2)$ ,  $u((0, 1, 0)) = (-3, 2, -1)$  et  $u((0, 0, 1)) = (-7, 4, 1)$ .

1. Déterminer une expression explicite de  $u$ .
2. Déterminer les éventuels antécédents de  $(-1, 1, 8)$  par  $u$ .
3. L'application  $u$  est-elle surjective?
4. Démontrer «à la main» que l'application  $u$  n'est pas injective.

**Exercice 4** – **Représentation via une base.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\Phi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$  défini sur la base canonique par :  $\Phi(1) = 1$  et pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\Phi(X^k) = (k + 1)X^k - kX^{k-1}$ . Calculer  $\Phi(P)$  pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$

## 2 Noyau, image

**Exercice 5** – Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes et en donner une base. Les applications sont-elles injectives ?

$$a) f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x + y, x - y, x + y)$$

$$b) f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longmapsto x + y + z$$

$$c) f_3 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto (P', P(0))$$

$$d) f_4 : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \longmapsto f' - 2f$$

**Exercice 6** – Déterminer l'image des applications linéaires suivantes et dire si elles sont surjectives ou non.

$$a) f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x - 2y + z, x - y + z, 3x - 7y + 3z)$$

$$b) f_2 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ P \longmapsto (P(0), P'(0), P''(0), P'''(0))$$

$$c) f_3 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ M \longmapsto AM$$

**Exercice 7** – On note  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles. Soit  $\Delta$  l'application définie pour toute suite  $(u_n)$  de  $E$  par  $\Delta(u_n) = (v_n)$ , où  $(v_n)$  est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Montrer que  $\Delta \in \mathcal{L}(E)$ .
2. Déterminer  $\ker(\Delta)$ . L'application  $\Delta$  est-elle injective?
3. Montrer que  $\Delta$  est surjective.
4. (a) Calculer  $\Delta^2$ .  
(b) Ecrire  $\ker(\Delta^2)$  sous forme d'un Vect.
5. Soit  $F$  l'ensemble des suites réelles  $(u_n)$  telles que  $u_0 = 0$ . Montrer que  $E = F \oplus \ker(\Delta)$ .

## 3 Théorème du rang

**Exercice 8** – On considère l'application suivante

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer le noyau de  $f$  et donner sa dimension.
3. En déduire la dimension de l'image de  $f$ .
4. En déduire une base de l'image de  $f$ .
5. L'application  $f$  est-elle injective ? surjective ? bijective ?

**Exercice 9** – On considère l'application suivante

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^4$ .
2. Déterminer une base de l'image de  $f$  et donner sa dimension.
3. En déduire la dimension du noyau de  $f$ .
4. En déduire une base du noyau de  $f$ .
5. L'application  $f$  est-elle injective ? surjective ? bijective ?

**Exercice 10** – Soit  $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$  ;  $P \longmapsto X(P' - P'(0))$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme.
2. Déterminer une base de l'image de  $\varphi$ .
3. Déterminer le rang de  $\varphi$ .
4. Quelle est la dimension du noyau ? En déduire une base du noyau.

**Exercice 11** – Soient  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  définie par  $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ,  $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ ,  $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ .

- Déterminer, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , l'expression de  $f(x, y, z)$ .
- Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

**Exercice 12** – Soit  $n \geq 2$ . Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on définit  $f(P) = P + (1 - X)P'$ .

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .
- Soit  $P_k = (X - 1)^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . Justifier que la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $E$ .
- Déterminer  $f(P_k)$  pour  $k = 0, \dots, n$  et en déduire  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  en précisant une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.

**Exercice 13** – Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On considère l'application  $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad u(P) = (P(2), P(3))$$

- On se place dans le cas  $n = 1$ . Déterminer une base de  $\text{ker}(u)$  et de  $\text{Im}(u)$ . L'application  $u$  est-elle injective, surjective, bijective ?
- Même question pour  $n = 2$  puis  $n = 3$ .

**Exercice 14** – On considère  $\mathbb{C} = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit  $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto (1 + i)z + (1 - i)\bar{z}$ .

- Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}$ .
- Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .

## 4 Opérations sur les applications linéaires

**Exercice 15** – Soient  $f$  et  $g$  les applications linéaires de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définies par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x - y, x + y)$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = (2x - 3y, 2y)$$

Donner l'expression de  $f \circ g$  et de  $g \circ f$ .

**Exercice 16** – Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $u$  et  $v$  les applications définies pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  par

$$u(P) = -nP + 2XP' \quad \text{et} \quad v(P) = nXP - X^2P'$$

- Montrer que  $u$  et  $v$  sont des endomorphismes de  $\mathbb{K}[X]$ .
- Montrer que  $u \circ v - v \circ u = 2v$ .
- Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $u \circ v^p - v^p \circ u = 2pv^p$ .

## 5 Isomorphismes

**Exercice 17** – On considère l'application suivante

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x + y, x - y + z, x + y)$$

Montrer que cette application linéaire est un automorphisme.

**Exercice 18** – Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , on considère les vecteurs  $f_1 = (1, 1, 1)$ ,  $f_2 = (1, 1, -1)$  et  $f_3 = (1, -1, 1)$ . On considère  $u$  l'application définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, x - y + z)$$

- Montrer que  $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- Vérifier que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer  $\text{Im}(u)$  et en déduire sans calcul  $\text{Ker}(u)$ .
- Justifier que  $u$  est un isomorphisme.
- Déterminer l'expression de  $u^2$ . En déduire une relation entre  $u$ ,  $u^2$  et  $\text{id}$ .
- En déduire l'expression de  $u^{-1}$  en fonction de  $u$  et  $\text{id}$ .

**Exercice 19** – Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on pose  $\varphi(P) = (X^2 + 1)P' - (2X - \alpha)P$ .

- Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- On suppose  $\alpha = 0$ . Donner une base de  $\text{Im}(f)$  puis une base de  $\text{Ker}(f)$ . Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- Pour  $\alpha \neq 0$ , montrer que  $\varphi$  est un automorphisme.

**Exercice 20** – On considère  $\mathbb{C} = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit  $a$  un nombre complexe fixé. On définit l'application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto z + a\bar{z}$ .

- Montrer que  $f$  est linéaire.
- Déterminer le noyau de  $f$ .
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  pour que  $f$  soit bijective.

## 6 Exercices plus théoriques

**Exercice 21** – Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - 5f + 6\text{Id}_E = 0$ .

- Montrer que  $f \in \text{GL}(E)$ .
- Soient  $F = \text{ker}(f - 3\text{Id}_E)$  et  $G = \text{ker}(f - 2\text{Id}_E)$ . Montrer que  $E = F \oplus G$ .

**Exercice 22** – Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

- L'application linéaire  $f$  est-elle un automorphisme ?
- Soit  $x_0 \in E$  tel que  $f^2(x_0) \neq 0_E$ . Montrer que  $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$  est une base de  $E$ .

**Exercice 23** – Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ .

- Montrer que  $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v \circ u)$ .
- Montrer que  $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im}(v)$ .
- En déduire que si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  alors  $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$  et  $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$ .
- Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2) \iff \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}$ .
- Montrer que  $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \iff \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$ .

**Exercice 24** – Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - 3f + 2\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

- Montrer que  $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$  et  $\text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$  sont en somme directe.
- Montrer que  $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$ .
- Rappeler le théorème du rang et en déduire que  $\dim(E) \leq \dim(\text{Ker}(f - 2\text{id}_E)) + \dim(\text{Ker}(f - \text{id}_E))$ .
- Rappeler la formule de Grassmann et montrer que  $\dim(\text{Ker}(f - 2\text{id}_E)) + \dim(\text{Ker}(f - \text{id}_E)) \leq \dim(E)$ .
- Montrer que  $\text{Ker}(f - 2\text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \text{id}_E) = E$ .